

S 564  
~~564~~  
S/A

5564

51A

## \* (٢) \*

### \* فهرست كتاب الجبر \*

صحيفة

مقدمة في علم الجبر	٢
مقدمة في بيان العلامات والاصطلاحات	٢
في الكميات السلبية	٦

### \* (الباب الاول) \*

#### \* (في العمليات الجبرية) \*

في تعاريف الحدود المتشابهة واختصارها	٨
في الجمع	٩
في الطرح	١٠
في الضرب	١٢
في القسمة	١٨
في الكسور	٣٢
في الاسس السالبة	٣٥

### \* (الباب الثاني) \*

في المعادلات والمسائل التي بدرجة اولى	٣٧
في بيان المعادلة ذات الدرجة الاولى والمجهول الواحد	٣٨
في المعادلات ذات الدرجة الاولى وجملة انجماهيل	٤٢
مسائل من الدرجة الاولى	٥٥
انواع ناتجة من مناقشة المسائل التي بدرجة اولى	٦٣
مناقشة عامة للمعادلات ذات الدرجة الاولى	٦٤

### \* (الباب الثالث) \*

(في المربع والجذر التربيعي والمعادلات والمسائل التي بدرجة ثانية)

في المربع والجذر التربيعي	٧٣
في حساب الجذور الصم ذات الدرجة الثانية والثالثة	٨٣

الكلام على جمع تلك الجذور وطرحها	٨٤
في التكلام على ضرب تلك الجذور	٨٤
في قسمة الجذور	٨٥

\* (في المعادلات والمسائل ذات الدرجة الثانية) \*

في المعادلات ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد	٩١
في المعادلة غير التامة ذات الدرجة الثانية	٩١
في المعادلة التامة ذات الدرجة الثانية	٩٣
في المناقشات العمومية للمعادلات ذات الدرجة الثانية	٩٧
في مسائل الدرجة الثانية	١٠٦

\* (الباب الرابع) \*

\* (في التناسبات والمتواليات العددية والهندسية واللوغاريتم) \*

في التناسبة العددية أى التفاضلية	١٢٩
في التناسبة الهندسية	١٣٠
في المتواليات العددية	١٣٤
مسائل يطلب حلها من الطلبة	١٣٨
في المتواليات التقسيمية أى الهندسية	١٣٨
مسائل تحل بواسطة المتواليات الهندسية	١٤٣
في اللوغاريتم	١٤٥
في اللوغاريتمات التى أساسها ١٠ واستعمال الجداول اللوغاريتمية	١٤٩
في المتمم اللوغاريتمى	١٥٠
في استعمال الجداول اللوغاريتمية فى العمليات الحسابية	١٥٣
فى شرح جدول اللوغاريتمات العرب واستعماله	١٥٣



\*(الباب الخامس)\*

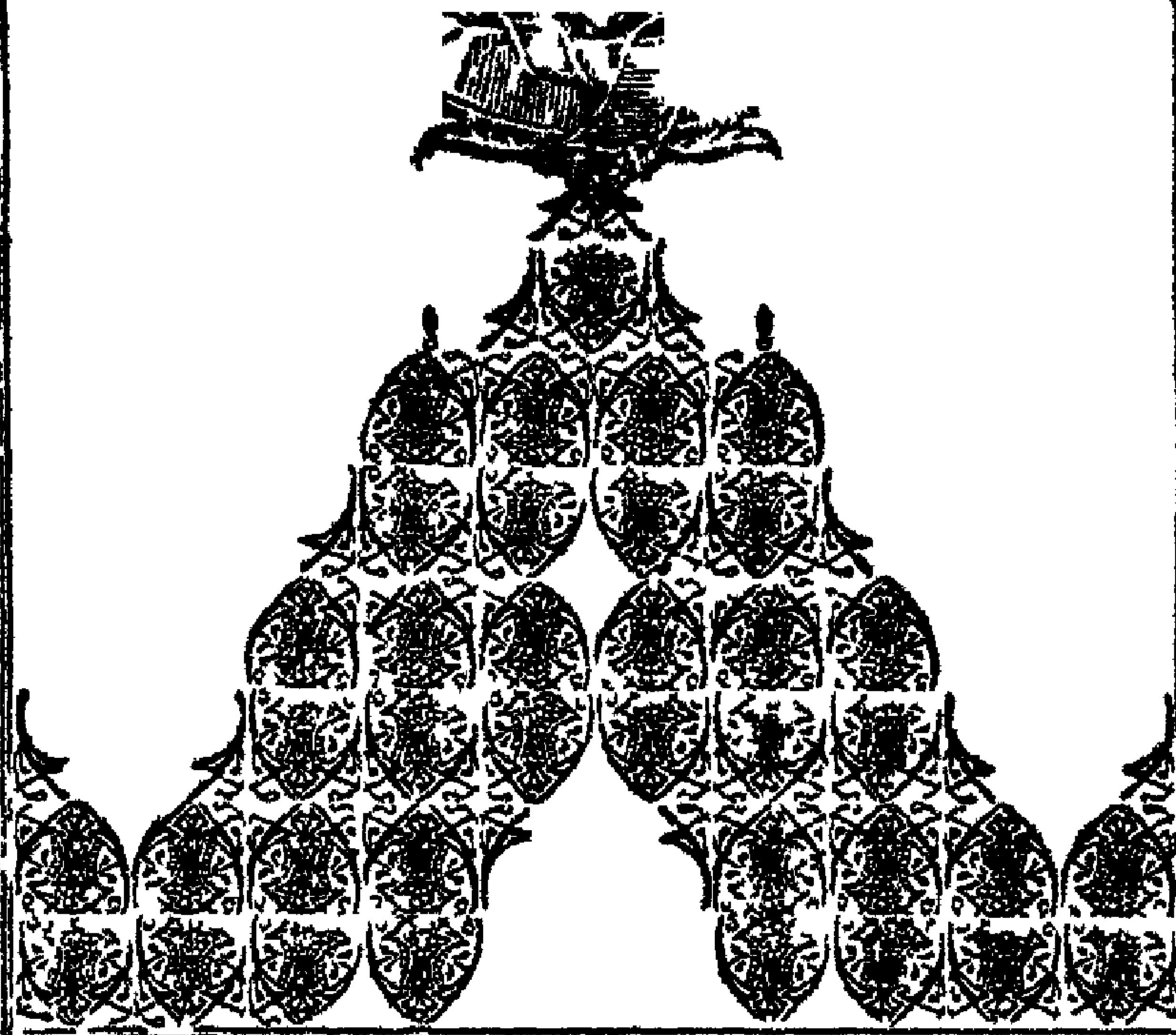
في مسائل مجله ابقواعد هذا المختصر وتطبيقها عليها تتمرن التلامذة  
وتقوى ملكتهم في هذا العلم وهي مرتبة بحسب ترتيب قواعد

١٦٠ مسائل تخص الدرجة الاولى

١٦٨ مسائل تحل بواسطة القواعد المقررة في الدرجة الثانية

١٨٢ مسائل تحل بواسطة قواعد المتوالية العددية





علم الجبر

بسم الله الرحمن الرحيم

نعمك يا جابر قلوب المنكسرين \* لا يقابلها شكر الشاكرين \* اذ لا يجمعها  
حاصر بعد \* ولا يعرف باقي طرحها احد \* ضربتها على وجودك براهين  
\* تدكدك بها اساس الملهدين \* وقسمتها بحكمتك فلاعتاب \* ان في ذلك  
لذكرى لاولى الالباب \* فهي اجل ان يعرف قدرها \* او يدرك بالاستخراج  
جذرها \* فحمدك اللهم على ما اوليت \* ونشكر فضل جودك على  
ما اسديت \* ونصلي ونسلم على سيد ولد عدنان \* الذي نسخ دينه جميع  
الاديان \* محمد المنتخب من اعلا ارومه \* المبعوث من خير جرقومه \*  
وعلى الخلفاء الراشدين \* وآله وصحبه اجمعين \* خصوصا سيف السطوة  
المتنضي \* ابي الحسن على المرتضى \* القائل من قلب اواه \* لا يعرف  
الجذر الا صم الا الله \* ما سمعت جامعة ورقاء \* وحن مشتاق  
الى اللقاء

وبعد فلما تعلقت ارادة الامير في الاعظم \* والداوري الاكرم \* بتريسة  
العساكر المصرية \* وعدم حرمانهم من الفنون العسكرية \* وكان من  
جملة وسائلها \* ومما لا غناء عنه لمساثلها \* علم الجبر \* العظيم القدر \*  
صدر امره الى من اجابه السعد بليك \* ناظر المدارس الثلاث على ييك \*  
بعمل منتخب لهم لطيف المبنى \* جليل القدر في المعنى \* فأحال ذلك  
على الماهر اللبيب \* والوذي الاريب \* صاحب القطنة الوفي الوعد \*  
عامر افندي سعد \* فانتخبه من مختصر الاعمال الجبرية \* الذي ترجمه  
بالمهندسخانة الخديويه \* من حاز من كل فن طرفا \* محمد افندي مصطفى \*  
وقد زاد عليه الاول قواعد مهمة \* و اضاف اليه مسائل نافعة به \*  
ساعده في ترجمتها من الفرنسية طويل الباع \* ابراهيم افندي البياع \*  
فجاء محتويا على حل المعادلات بالدرجتين \* وعلى التناسبات والمتواليات  
وما يتعلق بهذين \* فان لهما دخلا في حل المسائل العظيمة \* وفي حساب  
كوم القلل الجسيمه \* المعتاد تشكيلها بمخانات الطوبجية \* وعلى بحث  
اللوغاريتم العظيم الاهميه \* وقد قسم بمخاتمة لطيفة \* محتوية على مسائل  
شريفة \* مرتبة كترتيب قواعده الكلية \* منتخبة للعساكر الحربية \*  
\*(مقدمة)\*

زعم بعض الناس ان هذا العلم يسمى باسم اقل من اشتغل به ولا اصل لهذا  
الزعم ففي الكتب الاسلامية ان الذي اخترعه ابوبكر الخوارزمي وسماه بعلم  
الجبر والمقابلة لكن لم يعرف الزمن الذي اخترع فيه وقد قيل ان بلاد اسبانيا  
لما كانت في ايدي العرب مجاورة لبلاد افريقية اكتسبت هذا العلم منهم في نحو  
سنة اثنى الف ومائة مسيحية وفي نحو سنة اثنى الف وخمسمائة حضر بعض  
تجار ايطاليا من افريقية بنسخة من كتب هذا العلم الى بلاده فاشتغل به  
الايطاليون لكن لم يتصلوا على ازيد من حل معادلة بدرجة رابعة وقد دخل  
هذا العلم بلاد النمسا واخذ في التقدم وبلاد الانجليز ثم انتقل الى فرنسا  
في سنة ١٥٥٨ اثنى الف وخمسمائة وخمسين وثمانية واسرع في التقدم على يد

المؤلف فرانسوا ميت الباريسي وهو اقل شخص طبق الجبر على الهندسة  
وفي القرن السابع عشر تقدم هذا العلم تقدما واضحا من وقت الى آخر حيث  
ظهر فيه مشاهير المؤلفين كالمؤلف نوتون وديكارن الشهيرين وامثالهما  
وفي القرن الثامن عشر ظهر المؤلف لجرايج وكوت ولبلاس ولخوهما  
من فحول المؤلفين الذين تموا افوائده ورتبوه ترتيبا منتظما

وبتقدم هذا العلم تقدمت العلوم الهندسية والطبيعية والميكانيكية والفلكية  
والقنون العسكرية بل وجميع الصنائع وبذلك كان هذا العلم من اتفع العلوم  
لا ينكر فضله الا جاهل وذلك ان علم الهندسة قبل تقدم هذا العلم كان في حيز  
الضعف حتى ان كثيرا من مسائله كان مستحيل الحل ومكت على تلك  
الاستحالة مدة طويلة وكان ايضا التوصل لبراهين القضايا الهندسية  
صعبا اذ لا واسطة اذ ذاك تساعد العقول على مقاصدها فاضطر علماء هذا  
العلم للبحث عن اثبات قواعد نظرية عامة حافية الوضع رغبة المالك يتسبب  
عنها فك بعض المشكلات فاثبتوها وسموها بعلم الجبر وكان تصحيحه على يد اسير  
الاوزار \* ابراهيم عبدالغفار \* ولما تهيأ للتمام \* وليس وشاح الختام \*  
وسمته بالكواكب الدرية \* في الاعمال الجبرية \* وقد آن ان نشرع  
في المقصود \* فنقول بعون الملك المعبود



## \* (٢) \*

### \* (مقدمة في علم الجبر) \*

(١) الغرض الاصلى من علم الجبر حل المسائل العددية ومشكلات القضايا النظرية والعملية بوجه مختصر عام وانما يتوصل الى هذا العلم باستعمال الحروف والعلامات فالحروف تستعمل للدلالة على الاعداد ان كانت القضية حسائية والدلالة على الخطوط أو السطوح والاجسام ان كانت القضية اوالمسئلة هندسية

### \* (مقدمة في بيان العلامات والاصطلاحات) \*

تستعمل العلامات للدلالة بطريق الاختصار على الارتباطات الواقعة بين الكميات الجارية عليها العمل فالعلامات الاصلية المستعملة هي

(اولا) علامة  $+$  وتدل على جمع عددين حين توضع بينهما ويلفظ بهازائد مثال ذلك  $٥ + ٣$  يلفظ به  $٥$  زائد  $٣$  ويستدل بها على انه يلزم ضم العدد  $٣$  الى  $٥$

(وثانيا) علامة  $-$  وتدل على ان العدد التالى لهما مطروح من العدد السابق لهما ويلفظ بهاناقص

مثال ذلك  $٥ - ٣$  يلفظ به  $٥$  ناقص  $٣$  ويستدل بها على انه يلزم طرح العدد  $٣$  من  $٥$

(وثالثا) علامتا الضرب  $\times$  و  $\cdot$  وكتاهما تدل على أن كذا مضروب فى كذا ولا تستعمل الثانية الا فى الحروف فقط ويمكن بيان حاصل ضرب العددين الميينين بحرفين بكتابة احدهما بجانب الاخر بدون فاصل فحاصل ضرب  $٥$  فى  $٧$  مثلا يمكن بيانه هكذا  $٥ \times ٧$  وحاصل ضرب  $٣$  فى  $٤$  يمكن بيانه هكذا

$٣ \times ٤$  أو  $٣ \cdot ٤$  أو  $٣ ٤$

ويمكن بيان حاصل ضرب كيتين بجعل كتيهما بين قوسين موضوعة احدهما بجانب الاخرى ولا يستعمل ذلك الا فى المضارب المركبة من جزئين أو جملة

اجزاء متفاصلة عن بعضهما بعلامة  $\div$  أو  $\div$  — فواصل ضرب  $\times$  —  $\div$  في  $\div$   $\div$  يمكن بيانه هكذا  $(\div - \div)$   $(\div + \div)$  وحاصل ضرب  $\div - \div$   $\div$   $\div$  هـ في و يبين هكذا  $(\div - \div + هـ)$  و  
(ورابعا) علامة القسمة هكذا  $\div$  : أو شرطة افقية هكذا  $\div$  —  
وتستعملان كما تراه فيما اذا طلب مثلا خارج قسمة  $\div$  على  $\div$  فانه يبين  
هكذا  $\div : \div$  أو  $\div \div$  وكل منهما معناه  $\div$  مقسوم على  $\div$   
(وخامسا) المكرر وهو العدد الذي يكتب عن يمين عدد آخر مبين بحرف  
أو جملة حروف ويدل على عدد مرات تكرار العدد الآخر  
مثال ذلك  $\div$  فانه يدل على أن حرف  $\div$  مكرر خمس مرات أي  $\div + \div + \div + \div + \div$

(وسادسا) علامة التساوي هكذا  $=$  بلفظها مساوي وتدل على  
التساوي بين كميتين قد وضعت بينهما مثال ذلك  $\div = \div$  فانه يدل على  
تساوي المقدار  $\div$  بالمقدار  $\div$   
(وسابعا) علامتا  $<$  و  $>$  فان كلتا هاتين تدل على عدم تساوي الكميتين  
المفصولتين بها لكن الاولى تدل على  $\div$  كبر والثانية على الصغر مثال ذلك  
 $\div < \div$  وتلفظ هكذا  $\div$  اكبر من  $\div$  و  $\div > \div$  وتلفظ هكذا  $\div$   
اصغر من  $\div$

(وثامنا) للدلالة على عدم تساوي كميتين بدون تمييز صغراهما عن كبراهما  
تستعمل هذه العلامة  $\div = \div$  مثال ذلك  $\div = \div$  و يبين أن  $\div$   
ليس مساويا  $\div$

(٩) ويوجد علامتان ايضا احدهما تدل على قوة العدد والاخرى على  
جذره وقوة العدد هي حاصل ضرب مضروبين أو جملة مضارب كل منهما  
مساو لهذا العدد ويقال ان العدد مرفوع الى القوة الثانية او الثالثة  
أو الرابعة وهكذا اذا كان حاصله مكونا من مضروبين أو ثلاثة مضارب



أو أربعة وهكذا كل منها مساو لهذا العدد مثال ذلك  $\times \times \times \times$  فهذا يدل على القوة الثالثة للعدد  $\times$  وتبين قوة العدد بكتابة عليه ما تلا جهة الشمال بتليل عدد مرات دخوله مضروباً في هذه القوة ويسمى عدد المرات أساً والقوة الرابعة للعدد  $\times$  تكتب هكذا  $\times^4$  ويلفظ  $\times$  أس أربعة فالأس يدل على درجة القوة ليكن القوة الثانية لعدد تسمى مربعاً والقوة الثالثة تسمى مكعباً

وجذر العدد أصالة الذي إذا رفع لدرجة ما تحصل منه العدد المذكور وهذا الجذر يسمى الجذر الثاني أو الثالث وهكذا إذا رفع إلى القوة الثانية أو الثالثة وهكذا لا نتاج العدد المعلوم فالجذر الثاني يسمى الجذر التربيعي والجذر الثالث يسمى الجذر التكعيبي

فالعدد ٥ هو الجذر الثاني أو الجذر التربيعي للعدد ٢٥ و  $\times$  هو الجذر الرابع لمقدار  $\times^4$  ودرجة جذر العدد هي درجة القوة اللازمة لرفع هذا الجذر لينتج العدد المعلوم ويستدل على جذر العدد بوضع هذه العلامة  $\sqrt{\quad}$  عليه مكتوباً بين شعبتيها العدد المبين لدرجة الجذر فيستدل على

الجذر التكعيبي للعدد  $\times$  بهذه العلامة  $\sqrt[3]{\times}$  ويلفظ بها الجذر التكعيبي للعدد  $\times$  ومتى طلب جذر المربع فلا حاجة لوضع  $\sqrt{\quad}$  فوق العلامة فالجذر التربيعي للعدد ٧ يكتب هكذا  $\sqrt{7}$

(٣) ونظهر لك ثمرة استعمال الحروف والعلامات الجبرية في حل ما إذا كان عندنا

مجموع عددين يساوي ٢٥ وقاضيهما يساوي ٩ والمطلوب معرفة كل من هذين العددين

فيمكن حل هذه المسئلة بالقواعد الحسابية غير أن استعمال العلامات الجبرية أخصر وأسهل وذلك بأن يرمز لأصغر العددين المجهولين بالحرف  $x$  وأكبرهما  $y$  فإضاهما يساوي العدد ٩ يكون مقدار العدد الأكبر  $9 - x$  وحيث أن حاصل جمعهما يجب أن يكون مساوياً للعدد ٢٥

\*(٥)\*

يحدث هذا التساوى

$$س + س + س = ٩ \text{ أو } ٢٥ = ٩ + س + س + س$$

وحيث أن ٢ س + ٩ يساوى ٢٥ يكون ٢ س مساويا ٢٥ - ٩

$$\text{أى } ٢ س = ٢٥ - ٩ \text{ أى } ٢ س = ١٦$$

ومن حيث أن ٢ س يساوى ١٦ يكون س = نصف ١٦

$$\text{أو } س = \frac{١٦}{٢} = ٨$$

فأذن يكون العدد الأصغر مساويا ٨ والاكبر مساويا ٨ + ٩ أى

$$١٧ \text{ لأن } ١٧ + ٨ = ٢٥ \text{ و } ٩ = ٨ - ١٧$$

فقد ظهر من ذلك أن في استعمال العلامات الجبرية اختصارا وبساطة لحل

المسئلة غير أن هذا الحل غير عام وجعله عاما كما هو الغرض من علم الجبر

تستعمل الحروف وكيفية ذلك أن يقال ليكن  $س$  رمز الحاصل جمع

عددين  $و$   $د$  رمز الفاضل هما والمطلوب معرفة كل من العددين فبفرض

أن س رمز العدد الأصغر يكون الاكبر س +  $د$  فيحدث

$$س + س + س = د + س \text{ أو}$$

$$٢ س + د = س \text{ أى}$$

$$٢ س = س - د \text{ أو}$$

$$س = \frac{س - د}{٢}$$

وحيث أن العدد الأصغر يساوى  $\frac{س - د}{٢}$  يكون الاكبر الذى هو س +  $د$

$$\text{مساويا } \frac{س - د}{٢} + د = \frac{س - د}{٢} + \frac{س + د}{٢} = \frac{س + د + س - د}{٢} = \frac{٢س}{٢} = س$$

$$= \frac{س + د}{٢}$$

فأذن يكون العدد الأصغر مساويا  $\frac{س - د}{٢}$  والاكبر مساويا  $\frac{س + د}{٢}$

وليتنبه الى أن هذين الناتجين لا يخصان مقدارين مرادين من  $د$  و  $س$

فحينئذ يكون الحاصل عاما وهذان الناتجان المسميان قانونين يمكن استعمالهما

يدون واسطة في حل المسائل المشابهة لهذه المسئلة لانه اذا فرض أن المطلوب

ايجاد العددين اللذين حاصل جمعهما = ١٣٧ وفاضلها = ٥٩

\*(٢)\*

\* (٦) \*

يكفى ان يوضع فى هذين القانونين بدل  $\div$  العدد ١٣٧ وبدل  $\times$  العدد ٥٩ فيحدث  $\frac{٥٩+١٣٧}{٢}$  اى ٩٨ وهو مقدار العدد الاكبر ثم  $\frac{٥٩-١٣٧}{٢}$  اى ٣٩ وهو مقدار العدد الاصغر

ويمكن وضع المقدارين السابقين اللذين هما  $\frac{٥+٧}{٢}$  و  $\frac{٥-٧}{٢}$  بهذه الصورة  $\frac{٥}{٢} + \frac{٧}{٢}$  و  $\frac{٥}{٢} - \frac{٧}{٢}$  فتنتج قاعدة هى انه متى علم مجموع عددين وفاصلهما استنتج الاكبر منهما بضم نصف الفاضل الى نصف المجموع واستنتج الاصغر بطرح نصف الفاضل من نصف المجموع

\*(فى الكميات السلبية)\*

(٤) متى كانت الكمية المراد طرحها اكبر من الكمية التى يراد الطرح منها كانت عملية الطرح غير ممكنة لكن لبيان النتائج بكيفية مختصرة استنسبوا طرح الكمية الصغرى من الكبرى ووضع العلامة — امام الناتج أى الباقي

فاذا اريد مثلا طرح العدد ٧ من العدد ٥ بطرح العدد ٥ من العدد ٧ فيكون الباقي ٢ فيوضع امامه علامة — فيكون حينئذ — ٢ وكذلك اذا اريد طرح ٩ من ٤  $٤ - ٩$  من ٤  $٤ - ٩$  فالعملية غير ممكنة لانه لا يمكن طرح تسعة امثال  $٤ - ٩$  من اربعة امثال  $٤ - ٩$  فاذن يطرح اربعة امثال  $٤ - ٩$  من تسعة امثال  $٤ - ٩$  فالباقي يكون  $٥ - ٩$  وبوضع العلامة — امامه يكون الناتج  $٥ - ٩$  فكل من المقدارين — ٢ و  $٥ - ٩$  يسمى بالكمية السالبة

وينتج من ذلك أن الكميات السالبة هى الكميات المسبوقة بالعلامة — رأما الكميات الموجبة فهى الكميات الخالية منها او المسبوقة بالعلامة + فعلى مقتضى ذلك تكون الكميات السالبة ناتجة من عملية طرح غير ممكنة

مثال ذلك

تاجر ربح فى السنة الاولى مبلغا قدره  $\div$  وخسر فى السنة الثانية مبلغا قدره  $\times$  فما يكون حال رأس ماله

فالجواب

فالجواب أن يقال إذا كان الربح  $\leq$  أكبر من الخسارة  $\leq$  ف رأس المال  
 يزيد بقدر  $\leq$  —  $\leq$  لكن إذا قلنا الخسارة الربح بل كان  $\leq$  فقد  
 نقص رأس المال بقدر  $\leq$  —  $\leq$  فاذن كمية  $\leq$  —  $\leq$  الدالة على  
 زيادة رأس المال لا تدل الا على عملية طرح مستحيل حيث كان  $\leq$  مع  $\leq$   
 في طرح الاصغر من الاكبر وتوضع العلامة — امام الباقي ليعلم أن الناتج  
 ليس ربحا يضم الى رأس المال بل خسارة تطرح من رأس المال

فإذا فرض أن  $\leq$   $\leq$  ٧٠٠٠ و  $\leq$  ٤٠٠٠ فإنه يوجد ربح قدره ٣٠٠٠  
 وإذا فرض أن  $\leq$   $\leq$  ٤٠٠٠ و  $\leq$  ٧٠٠٠ فإنه يوجد خسارة قدرها ٣٠٠٠  
 لكن يقال على وجه الطرد أن رأس المال ربح بقدر — ٣٠٠٠ ولو  
 كان ذلك خلاف المعتاد

(٥) وإذا اعتبرنا حينئذ في المقدار  $\leq$  —  $\leq$  أن المقدار  $\leq$  ثابت  
 والمقدار  $\leq$  متزائد من ابتدا الصفر حدثت نواتج متناقصة فتى كان  $\leq$   
 $\leq$  يكون الفرق  $\leq$  —  $\leq$  مساويا لصفر وإذا استمر المقدار  $\leq$   
 في ازدياده حدثت كميات سلبية وكلما كانت  $\leq$  كبيرة كانت هذه الكميات  
 السلبية — كبيرة أيضا باعتبار مقاديرها المطلقة فإذا فرض  $\leq$  = ٣  
 وفرض على التوالي

$\leq$  = ٠ و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ والخ  
 كانت مقادير

$\leq$  = ٣ و ٢ و ١ و ٠ و ١ — و ٢ — و ٣ — و ٤ — و ٥ — و ٦ — والخ  
 وحيث أن المقادير السالبة معاقبة للمقادير الموجبة التي هي ١ و ٢ و ٣  
 و ٠ تعتبر اصغر من صفرو من حيث أن الكميات السالبة الكبيرة  
 المقدار المطلق تأتي بعد الكميات السالبة الصغيرة المقدار تعتبر اقل منها ولذا  
 يشاهدان

٢ — أصغر من صفر و ٥ — أصغر من ٢ — وباستعمال علامتين  
 $\leq$  و  $\leq$  يكون

\* (٨) \*

$- < ٢$  و  $- > ٠$  أو  $- > ٢$

$٠ < ٢$  و  $٢ < ٠$

وينتج من ذلك ان كل كمية سالبة اصغر من صفرو ان اصغر الكميتين السالبتين  
ما كان مقدارها المطلق اكبر

\* (الباب الاول) \*

\* (في العمليات الجبرية) \*

\* (في تعاريف الحدود والمتشابهة واختصارها) \*

(٦) كل كمية دخل فيها حرف أو جملة حروف تسمى كمية جبرية أو مقداراً  
جبرياً للكمية وكل كمية جبرية تلت اجزاؤها من العلامتين  $-$  و  $+$   
تسمى حداً أو كمية ذات حد وكل كمية مركبة من جزئين فأكثر تحتلها  
العلامة  $-$  أو  $+$  تسمى كمية ذات حدود ثم ان كانت الكمية محتوية  
على حدين سميت ذات الحدين وان كانت محتوية على ثلاثة سميت ذات الثلاثة  
حدود فإذا كانت  $٤$  حد  $٥$  من نوع ذات الحدين

(٧) اذا وضع في المقدار الجبري أعداد بدل الحروف واجريت عليها  
العمليات المنوطة بها فالمقدار الناتج يسمى المقدار الرقي

\* (مثال ذلك) \*

اذا فرض في حد  $٤$  حد  $٣$  د أن  $٢ = ح$  و  $٤ = د$  يكون  
مقداره الرقي  $٤ \times ٨ = ٣٢$  ومن البديهي أن المقدار الرقي  
الكمية ذات حدود لا يتغير كما انما كان ترتيب كتابتها حدودها لان الناتج  
لا يتغير بتغير اى ترتيب اجزى لاجل عمليات جمع او طرح

(٨) كل مضروب دخل في حد يسمى اصلاً لهذا الحد وعدد هذه  
المضارب يسمى درجة الحد فالحد  $٥$  حد  $٣$  د مثلاً يحتوى على ستة  
اصول فهو من الدرجة السادسة فحينئذ درجة الحد تساوى حاصل جمع  
اسس الحروف المحتوى عليها ذلك الحد

ويقال للكمية ذات الحدود متجانسة اذا كانت درجة جميع حدودها

واحدة

واحدة فالكمية ذات الحدود  $٣ ح٢ - ٤ ح١ + ٥ ح٠$  مثلا كمية رباعية متجانسة خماسية الدرجة .

(٩) الحدود المركبة من احرف متحدة الصورة والاسم تسمى حدودا متشابهة ومتى كانت الكميات ذات الحدود محتوية على حدود متشابهة امكن اختصارها بتحويل هذه الحدود الى حد واحد فالكمية ذات الحدود  $٥ ح٢ - ٨ ح١ + ٧ ح٠ - ٢ ح٢$  يمكن وضعها بهذه الصورة  $٥ ح٢ + ٧ ح٠ - ٨ ح١ - ٢ ح٢$

فحدا  $٥ ح٢$  و  $٧ ح٠$  يدلان على خمسة امثال  $٢ ح١$  زائد اربعة امثال  $٢ ح١$  أعنى  $١٢ ح١$  فاذن يمكن استعواضهما بكمية  $١٢ ح١$  وحدا  $٨ ح١ - ٢ ح١$  و  $٢ ح١$  يؤلان الى كمية  $١٠ ح١$  كما آل الحدان الموجبان الى كمية  $١٢ ح١$  فحينئذ تؤول الكمية ذات الحدود الى  $١٢ ح١ - ١٠ ح١$  وبها يستدل على انه يلزم طرح  $١٠ ح١$  من  $١٢ ح١$  فيكون الباقي  $٢ ح١$  وهو الذى الت اليه الكمية ذات الحدود ومثل ذلك يجرى فى

$$٧ ح٢ - ٩ ح١ - ٥ ح٠ - ٣ ح٢ + ٦ ح١ = ١٣ ح٢ - ١٧ ح١ = ٤ ح١$$

فالقاعدة العمومية لتحويل جملة حدود متشابهة الى حد واحد ان تجمع المكررات الموجبة والمكررات السالبة ثم يطرح المكرر الاصغر من الاكبر وتوضع علامة الاكبر امام الناتج ثم توضع الحروف المشتركة بأسسها الاصلية بجانب الناتج المذكور

\*(فى الجمع)\*

(١٠) جمع الكميتين  $٣ ح٢ - ٢ ح١$  و  $٤ ح١ - ٥ ح٠$  يجرى العمل هكذا

\* (١٣) \*

$$٣ - ٢ = ١$$

$$٤ - ٥ = ١$$

$$\frac{٣ - ٢ = ١ + ٤ - ٥ = ١}{١}$$

فيضم أولا ٤ هـ الى ٣ - ٢ هـ بان يوضع ٤ هـ بعد ٣ - ٢ هـ  
بالعلامة + فيحصل ٣ - ٢ هـ + ٤ هـ وحيث ان هذا الناتج  
أكبر من المطلوب بالمقدار ٥ و يطرح ٥ و من ٣ - ٢ هـ + ٤ هـ  
اي يكتب ٥ و بعده بالعلامة - فاذن يكون حاصل الجمع المطلوب  
٣ - ٢ هـ + ٤ هـ - ٥ و

واذا كان حاصل الجمع محتويا على حدود متشابهة وجب اختصارها  
فالقاعدة العمومية لجمع جملته كميات ان تكتب متتالية كما هي موجودة ثم  
تختصر الحدود المتشابهة ان وجدت

\* (تنبيه) \*

توضع الحدود المتشابهة للكميات ذات الحدود تحت بعضها في العمل ثم يكتب  
من اول الامر الحاصل بالاختصار وصورة العمل هكذا

$$\begin{array}{r} ٨ - ٥ - ٣ + ٧ \\ ٦ - ٢ + ٤ - ٧ \\ ٥ - ٤ + ٣ - ٧ \\ ٢ - ٥ + ٣ + ٧ \\ \hline ١١ - ٢ + ٢ - ٢ \end{array}$$

\* (في الطرح) \*

(١١) لطرح الكمية ذات الحدود ٦ - ٤ هـ من الكمية  
ذات الحدود ٥ - ٢ هـ يجري العمل هكذا

$$\begin{array}{r} ٥ - ٢ \\ ٦ - ٤ \\ \hline ٥ - ٢ - ٦ + ٤ \end{array}$$

فيطرح

في طرح من الكمية ذات الحدود  $٥ د^٣ - ٢ د^٢ + ٢ د - ١$  اولاً الكمية  
 $٦ د^٢$  بكتابتها بعدها بالعلامة  $-$  فيحصل  $٥ د^٣ - ٢ د^٢ + ٢ د - ١$   
 $- ٦ د^٢$  لكن حيث ان  $٦ د^٢$  اكبر من المطروح بقدر  $٤ د^٢$   
 فالناتج وهو  $٥ د^٣ - ٢ د^٢ + ٦ د^٢ - ٢ د - ١$  يكون اصغر من الناتج  
 الحقيقي بقدر  $٤ د^٢$  فيضم له هذا المقدار بالعلامة  $+$  فيكون الناتج  
 حينئذ هكذا

$$٥ د^٣ - ٢ د^٢ + ٦ د^٢ - ٢ د - ١ + ٤ د^٢$$

• واذا كان الناتج الذي هو باقي الطرح محتوياً على حدود متشابهة وجب  
 اختصارها

فالقاعدة العمومية لطرح كمية من اخرى أن تكتب الكمية التي يراد  
 طرحها بجانب الاخرى مع تغيير جميع علامات حدودها واختصار الحدود  
 المتشابهة ان وجدت

\*( تنبيهان ) \*

الاول اذا اريد بيان باقي الطرح من غير اجراء العمل في المثال السابق وضع  
 بهذه الصورة

$$٥ د^٣ - ٢ د^٢ - ( ٦ د^٢ - ٢ د + ١ )$$

اعني للدلالة على طرح كمية ذات حدود من مثالها تحصر الكمية التي يراد  
 طرحها بين قوسين بهذه الصورة ( ) وتكتب جانب المطروح منه جهة  
 اليسار مفصولة بالعلامة  $-$  واذا اريد اجراء عملية الطرح يحذف  
 القوسان وتغير علامة الحدود المحصورة بينهما

الثاني متى وجدت حدود متشابهة وضعت في العمل تحت بعضها ثم تغير  
 علامات المطروح وتختصر الحدود المتشابهة وهالك كيفية العمل

$$٤ د^٣ - ٧ د^٢ + ٦ د - ١ + ٣ د^٢$$

$$٢ د^٣ + ٤ د^٢ - ١ د - ١ - ٥ د^٣$$

$$٢ د^٣ - ١ د^٢ - ١ د - ١ + ٨ د^٣$$









اختلفت علامتهما ثم تختصر الحدود المنتهية إلى وجدت

• (تنبيه) •

متى رتب مضروباً حاصل ضرب بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف واحد  
فحاصل ضرب الحد الأول من المضروب في الحد الأول من المضروب فيه  
يحتوي على حرف الترتيب بأس أكبر من كل من أسس في الحواصل الأخرى  
الجزئية لأنهما الحدان المشتملان على حرف الترتيب بأس أكبر من أس كل  
من الحدود المشتملة على الحرف المذكور وحيث وجد حاصل جزئى لا يمكن  
اختصاره مع آخرى يكون هو الحد الأول لحاصل الضرب المطلوب المرتب  
بترتيب مضاربه

ومثل ذلك يقال في حاصل ضرب الحد الأخير من المضروب في الحد الأخير  
من المضروب فيه فيكون هو الحد الأخير لحاصل الضرب المطلوب

ومثل ذلك يقال أيضاً في ترتيب الكميتين ذاتي الحدود بالنسبة للدرجات  
التصاعدية لحرف فيكون أس الحد الأول لحاصل الضرب الأصلي أصغر من  
أس كل من الحدود الأخرى وأس الحد الأخير أكبرها

فعلى ذلك إذا كان حاصل الضرب مرتباً بترتيب مضروبيه فالحد الأول منه  
يكون في الحقيقة حاصل ضرب الحد الأول من المضروب في الحد الأول من  
المضروب فيه والحد الأخير منه يكون في الحقيقة حاصل الضرب للحد الأخير  
من المضروب في الحد الأخير من المضروب فيه

(١٥) أقل عدد الحدود التي يشتمل عليها حاصل ضرب كميتين ذاتي حدود  
في بعضهما اثنان لأنه قد ثبت أن حاصل ضرب كميتين ذاتي حدود يكون  
مشتملاً أقل ما هنالك على حدين لا يمكن اختصارهما وأكثر عدد الحدود  
التي يشتمل عليها حاصل ضرب كميتين ذاتي حدود في بعضهما يكون مساوياً  
لحاصل ضرب عدد حدود المضروب في عدد حدود المضروب فيه إذا لم يحتو  
هذا الحاصل على حدود يمكن اختصارها

(١٦) حاصل ضرب كميتين ذاتي حدود متجانسة كمية ذات حدود متجانسة

درجتها مساوية لمعامل جمع درجتي مضروبها لان درجة كل حاصل ضرب  
جزئي تساوي حاصل جمع درجتي مضروبيه كما هي قاعدة ضرب حدين في بعضهما  
واذا احتوت الكمية ذات الحدود على حرف اسمه متكرر في بعض حدودها  
او في جميعها اعتبرت هذه الحدود حدا واحدا بان تحصر هذه الحدود بين  
قوسين ماعدا الحرف المذكور وتجعل مكرر الحرف المذكور مثال ذلك

$$x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2 \text{ قترن هكذا}$$

$$(x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2)$$

فالكمية  $x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2$  تعتبر مكرر الحرف  $x^2$  وهي مرتبة  
بحسب الدرجات التنازلية للحرف  $x$  ولك ان ترتيبها بحسب الدرجات  
التنازلية للحرف  $h$  هكذا

$$(x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2)$$

ويمكن وضع الكمية  $(x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2)$  مرتبة بهذه  
الصورة او بهذه الصورة

$$\begin{array}{c|c} x^2 & x^2 y^2 z^2 - \\ & x^2 y^2 z^2 - \\ & x^2 y^2 z^2 + \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x^2 & x^2 y^2 z^2 + \\ & x^2 y^2 z^2 - \\ & x^2 y^2 z^2 - \end{array}$$

وسياتى استعمال ذلك في القسمة وحل المعادلات الحرفية واجراء عملية  
الضرب يـكون على كيفيتي الوضعين المتقدمين وهما مثالاً لتوضيح  
ذلك

(الكيفية الاولى) \*

$$\begin{array}{r} \text{مضروب} \\ (x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{مضروب فيه} \\ (x^2 y^2 z^2 + x^2 y^2 z^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2) \\ + (x^2 y^2 z^2 + x^2 y^2 z^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2) \\ + (x^2 y^2 z^2 + x^2 y^2 z^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2) \\ + (x^2 y^2 z^2 + x^2 y^2 z^2) \\ + (x^2 y^2 z^2 + x^2 y^2 z^2) \end{array}$$

فاذا



وينتج من ذلك أن مربع كمية ذات حدين يحتوى على مربع الحد الاول زائدا  
ضعف حاصل ضرب الحد الاول فى الثانى زائدا مربع الحد الثانى

الثانية إذا ضرب  $٥ + ٢٢ + ٤٢ + ٤$  في  $٥ + ٢$  يحدث مكعب  $٥ + ٢$   
 أى  $(٥ + ٢)^٣ = ٢ + ٤٢ + ٢٢٢ + ٤٢٢$

وينتج من ذلك ان مكعب كمية ذات حدين يحتوي على مكعب الحد الاول  
زائدا حاصل ضرب ثلاثة امثال تربيع الاول في الثاني زائدا حاصل ضرب  
ثلاثة امثال الاول في تربيع الثاني زائدا مكعب الثاني

الثالثة اذا ضرب  $(s + 7)$  في  $(s - 7)$  ينتج

$$s^2 - 7^2 = (s - 7)(s + 7)$$

وينتج من ذلك ان حاصل ضرب مجموع كيتين في فاضلهما يساوى الفرق بين  
مربعيهما فيكون الفرق بين مربعي كيتين مساويا لحاصل ضرب جمع جذريهما  
في فاضل الجذرين مثال ذلك

$$\text{وكذا } (s_{73} - s_{70})(s_{73} + s_{70}) = s_{79}^2 - s_{70}^2$$

$$(\overline{s} \gamma - \overline{r} \gamma) (\overline{s} \gamma + \overline{r} \gamma) = s - r$$

\* (في القصة) \*

(١٨) إذا كان المطلوب قسمة حد على آخر يقال

اولا مكرر خارج القسمة يستتج من تقسيم مكرر المقسوم على مكرر المقسوم عليه لان المقسوم يكون مساويا لحاصل ضرب المقسوم عليه في خارج القسمة وحيث أن مكرر حاصل ضرب يساوي حاصل ضرب مكرر مضروبه كافي (بند ١٣) يكون مكرر المقسوم مساويا لحاصل ضرب مكرر المقسوم عليه في مكرر خارج القسمة فحينئذ يكون مكرر خارج القسمة مساويا لمكرر المقسوم مقسوما على مكرر المقسوم عليه كافي قاعدة الاسس وثانيا اذا كان المقسوم محتويا على حرف ليس في المقسوم عليه يكتب في خارج القسمة عين ما في المقسوم لان المقسوم هو حاصل ضرب المقسوم عليه في خارج القسمة فكل حرف ليس في المقسوم عليه وهو داخل في المقسوم

کے

يكتب في خارج القسمة (انظر بند ٤.٣ في قاعدة الحروف)  
وثالثا اذا اتحد حرف في المقسوم والمقسوم عليه يكتب ذلك الحرف  
في خارج القسمة بأس مساو لاسه في المقسوم ناقصا لاسه في المقسوم عليه لان  
المقسوم يساوى حاصل ضرب المقسوم عليه في خارج القسمة فينبذ يكون  
اس الحرف من المقسوم مساويا لحاصل جمع اسيه في المقسوم عليه وخارج  
القسمة كما في (بند ١٣) فاذن يكون أس الحرف من خارج القسمة مساويا  
لاسه في المقسوم ناقصا لاسه في المقسوم عليه (انظر قاعدة الاسس)

ورابعا اذا اتحدت علامتا المقسوم والمقسوم عليه كانت علامة خارج  
القسمة + واذا اختلفت فهما كانت علامته - لانه اذا فرض أن  
علامة المقسوم عليه زائد وعلامة المقسوم الذي هو عبارة عن حاصل ضرب  
ناقص يكون علامتا مضروبيه متخالفة كما في (بند ١٤) وحيث أن  
علامة المقسوم عليه الذي هو عبارة عن احد المضروبين زائد تكون علامة  
خارج القسمة الذي هو عبارة عن المضروب الآخر ناقصا (انظر قاعدة  
العلامات)

فالقاعدة العمومية لتقسيم حد على آخر أن يقسم مكررا المقسوم على مكرر  
المقسوم عليه وتكتب الحروف الذي يحتوى عليها المقسوم دون المقسوم  
عليه عقب الناتج الاول باسمها الكائنة به في المقسوم ثم تكتب الحروف  
المشتركة الكائنة في المقسوم والمقسوم عليه بأس مساو لفاضل اسمها  
الكائنة به في المقسوم والمقسوم عليه ويوضع في خارج القسمة علامة +  
اذا اتحدت علامتا الحدين وعلامة - اذا اختلفت علامتاها -  
وايضاح هذه القاعدة يكون بتقسيم  $24 \div 6 = 4$  على  $24 \div 3 = 8$  هكذا

$$24 \div 3 = \frac{24 \div 6}{3 \div 6} = 8$$

\*(تنبيه)\*

تقسيم حد على آخر غير ممكن اذا كان مكررا المقسوم غير قابل للقسمة على مكرر  
المقسوم عليه او كان حرف من المقسوم عليه غير موجود في المقسوم او كان



اس حرف من المقسوم عليه اكبر من اسه في المقسوم فاذا وجدت حالة من هذه الاحوال الثلاث جعل خارج القسمة ككسر اعتيادي يختصر فقط ان قبل الاختصار بان تحذف منه المضارب المشتركة في كل من حديه فحينئذ خارج قسمة  $\frac{24}{18} = \frac{4}{3}$  على  $\frac{24}{18}$  يحذف المضروب المشترك  $\frac{6}{6}$  من كل من الحدين

(١٩) اذا قسم  $\frac{24}{18}$  على  $\frac{4}{3}$  جريا على قاعدة الاسس يحدث  $\frac{24}{18} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{3}$

ومن البديهي أن  $\frac{6}{3} = 2$  فاذن يكون  $\frac{24}{18} = 2$  وينتج من ذلك أن كل حرف اسه صفر يساوى واحدا

(٢٠) ولنشتغل الآن بتقسيم كمية ذات حدود على مثلها فنفرض أن المقسوم  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$  والخ والمقسوم عليه  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$  والخ وازموزا  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$  والخ والى دالة على حدودا ياما كانت وأن المقسوم والمقسوم عليه وخارج القسمة مرتبة بحسب الدرجات التنازلية للحرف من فاذن يكون وضع العمل هكذا

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \quad | \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ \hline 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \quad | \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ \hline 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \end{array}$$

ثم يقال من المعلوم ان المقسوم يساوى المقسوم عليه مضروبا في خارج القسمة وتقدم في (تنبية بند ١٤) انه اذا كان حاصل الضرب ومضروباه مرتبة بحسب حرف واحد كان الحد الاول لحاصل الضرب هو حاصل ضرب اول حد من المضروب في اول حد من المضروب فيه فيكون  $1 \times 1 = 1$  مساويا لحاصل ضرب  $1 \times 1$  واذا يستنتج  $1$  بتقسيم  $1$  على  $1$  وحيث علم الحد  $1$  يضرب المقسوم عليه في هذا الحد ويطرح حاصل الضرب من المقسوم فينتج باق بهذه الصورة  $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$  الخ

لا يحتوى الاعلى حاصل ضرب القسم عليه في جزء خارج القسم  
 $\text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ}$  الخ وحيث أن حاصل الضرب م  $\text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ}$  ع ومضاريه  
 $\text{أ} + \text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ}$  الخ و  $\text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ}$  الخ مرتبة بكيفية واحدة  
 يكون م مساويا لحاصل ضرب أ في  $\text{ـ}$  (كافي تنبيه ١٤) فاذن  
 يستنتج  $\text{ـ}$  بتقسيم م على أ ثم يضرب  $\text{ـ}$  في المقسوم عليه ويطرح  
 الحاصل من الباقي م  $\text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ}$  ع فينتج باق جديد بهذه الصورة  
 •  $\text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ} + \text{ـ}$  الخ وبمثل ما تقدم يتوصل الى تقسيم ر على أ لحدوث  
 $\text{ـ}$  وهلم جرا

فالقاعدة العمومية لتقسيم ذات الحدود على مثلها ان يرتب المقسوم  
 والمقسوم عليه بالنسبة للدرجة التصاعدية او التنازلية لحرف واحد  
 ثم يقسم الحد الاول من المقسوم على الحد الاول من المقسوم عليه فيجذب  
 الحد الاول من خارج القسم ثم يضرب المقسوم عليه في الحد الاول من خارج  
 القسم ويطرح الحاصل من المقسوم ثم يقسم الحد الاول من الباقي على  
 الحد الاول من المقسوم عليه فيجذب الحد الثاني من خارج القسم ثم يضرب  
 المقسوم عليه في الحد الثاني من خارج القسم ويطرح الحاصل من الباقي  
 الاول فيجذب باق ثان يقسم على الحد الاول من المقسوم عليه لحدوث الحد  
 الثالث من خارج القسم ثم يجرى العمل على هذا المنوال حتى يصير الباقي  
 صفرا أو غير قابل للقسم على الحد الاول من المقسوم عليه

\* (٢٢) \*

وايضاح هذه القاعدة يكون تقسيم ذات الحدود  $٢١٨ - ٢٤٨$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & ٢٢ & ٠ & ٢٣ & \\ & ٢ & ٢ & & & & \\ ٢١٠ + ٢٢٥ + ٢٤٤ & \text{على} & ٢٤ - ٢٠ & \text{هكذا} & & & \end{array}$$

$\begin{array}{r} ٢ \quad ٢ \quad ٤ \\ ٢١٠ + ٢٢٥ - ٢٤٨ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٤ \quad ٢٢ \quad ٢٣ \quad ٤ \quad ٠ \\ ٢١٨ + ٢٢٥ - ٢١٠ + ٢٤٤ - ٢٤٨ \end{array}$
$\begin{array}{r} ٢ \quad ٢ \quad ٣ \\ ٢٧ - ٢٢٢ + ٢٨ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٢ \quad ٤ \quad ٠ \\ ٢٢٨ + ٢٤٢ - ٢٢٥ \end{array}$

الباقى الاول

$$\begin{array}{r} ٤ \quad ٢٢ \quad ٢٣ \quad ٤ \\ ٢١٠ + ٢٢٢ + ٢٤٤ - ٢٤٨ \end{array}$$

الباقى الثانى

$$\begin{array}{r} ٢٢ \quad ٢٣ \quad ٤ \\ ٢٠ + ٨ - ١٢ + ٢١٠ \\ ٤ \quad ٢٢ \quad ٢٣ \\ ٢٤٠ - ٢٢٢ + ٢٤٨ \end{array}$$

الباقى الثالث

$$\begin{array}{r} \dots \dots \dots \end{array}$$

فبعد ترتيب ذات الحدود بالنسبة للدرجة التنازلية للعرف  $٢$  يقسم

$٢٣٥$  على  $٢٥$  فيحدث  $٩$  وهو الحد الاول من خارج القسمة

ثم يضرب المقسوم عليه في  $٩$  ويطرح الحاصل من المقسوم بتغير علامات

كل من الحواصل الجزئية ووضع الحاصل المذكور تحت الحدود المشابهة

لحدوده من المقسوم واختصار الحدود المتشابهة فيحدث باق هو

$$\begin{array}{r} ٤ \quad ٢٢ \quad ٢٣ \quad ٤ \\ ٢١٠ + ٢٢٢ + ٢٤٤ - ٢٤٨ \end{array}$$

ثم يقسم الحد الاول  $٢١٠$  من هذا الباقي على  $٢٥$  فيحدث  $٤$  وهو الحد الثانى

من خارج القسمة ثم يجرى العمل على هذا المنوال

هذا واختصار العمل يكون بضرب كل حد من خارج القسمة فى المقسوم

عليه وطرحه مع اختصار الحدود المتشابهة الموجودة فيه وصورة العمل

هكذا

$$\begin{array}{r} ٢ \quad ٢ \quad ٤ \quad ٢٢ \quad ٢٣ \quad ٤ \quad ٠ \\ ٢١٠ + ٢٢٢ + ٢٤٤ - ٢١٠ + ٢٢٢ + ٢٤٤ - ٢٤٨ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٢٢ \quad ٢٣ \quad ٤ \\ ٢٧ - ٢٢٢ + ٢٨ - ٢١٠ + ٢٢٢ + ٢٤٤ - ٢٤٨ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٤ \quad ٢٢ \quad ٢٣ \quad ٤ \\ ٢٤٠ - ٢٢٢ + ٢٤٨ \end{array}$$

\* (٢٣) \*

فبعد استنتاج  $٦٧^٣$  انقضى الحد الاول من خارج القسمة بضرب  $٦٧^٣$  في  $٦٥^٢$   
 فيحدث  $٦٣٥^٥$  ولطرحه يجعل  $٦٣٥^٥$  وحاصل ضرب  $٦٤^٥$  في  $٦٧^٣$   
 يحدث عنه  $٦٢٨^٤$  ولطرحه يجعل  $٦٢٨^٤$  وهو جدي ينبغي اختصاره  
 مع  $١٨^٤$  فيصير  $١٠^٤$  ثم يجري العمل على هذا الاسلوب

\*(تنبيهان)\*

الاول متى كان باقى عملية القسمة غير صفر كل خارج القسمة يكسر بسطه  
 الباقي المذكور ومقامه المقسوم عليه

الثاني تقسيم ذات الحدود على مثلها غير ممكن متى كان الحد الاول من المقسوم  
 غير قابل للقسمة على الحد الاول من المقسوم عليه او كان الحدان الاخيران  
 منهما كذلك او كان الحد الاول من اى باقى لا يقبل القسمة على الحد الاول  
 من المقسوم عليه او كان المقسوم والمقسوم عليه مرتين بالنسبة للدرجات  
 التنازلية لحرف كالحرف  $س$  وكان حاصل جمع اى هذا الحرف في الحد  
 الاخير من المقسوم عليه وخارج القسمة اصغر من اسه في الحد الاخير من  
 المقسوم لانه اذا اجريت عملية القسمة وانتهت بدون باقى فالحد الاخير من  
 المقسوم يكون مساويا لحاصل ضرب الحد الاخير من المقسوم عليه في الحد  
 الاخير من خارج القسمة فاذن يكون  $أس$   $س$  في الحد الاخير من المقسوم  
 مساويا لحاصل جمع اى هذا الحرف في الحدين الاخيرين من المقسوم عليه  
 وخارج القسمة وهذا مناقض لما فرضناه من أن حاصل جمع اى الحدين  
 الاخيرين من المقسوم عليه وخارج القسمة اصغر من  $أس$  الحد الاخير من  
 المقسوم مع أن  $أس$   $س$  يجب أن يكون دائما متناقضا في خارج القسمة

وكذلك لا تكون القسمة ممكنة متى كانت ذات الحدود مرتين بحسب  
 الدرجات التصاعدية لحرف كالحرف المذكور وكان حاصل جمع اى هذا  
 الحرف في الحد الاخير من المقسوم عليه وخارج القسمة اكبر من اسه في الحد

الاخير من المقسوم



في بقية الحواصل الجزئية فيكون الحاصل المذكور مساويا  $اسء$  فاذن  
 يكون  $اسء = اسء \times اسء$  ومنها يستخرج  $ا = ا \times ا$   
 أو  $ا = ا$  وحيث علم المكرر  $ا$  يضرب المقسوم عليه في  $اسء$   
 ويطرح الحاصل من المقسوم فالباقي  $م سء + ح سء + د سء + ر$   
 لا يحتوي الا على حاصل ضرب المقسوم عليه في الجزء  $سء + ح سء$   
 $د + ر$  من خارج القسمة فيستخرج  $سء$  بتقسيم  $م$  على  $ا$  وعلى هذا  
 المنوال يكون العمل وحالة التقسيم هذه ليست غير الحالة العامة لانه  
 بتقسيم مكرر اول حد من المقسوم على مكرر اول حد من المقسوم عليه  
 يتوصل الى تقسيم كمية ذات حدود على مثلها  
 ويبان ذلك في تقسيم الكمية ذات الحدود

$$\begin{array}{cccccccc} ٤ & ٣ & ٢ & ٣ & ٤ & ٢ & ٢٢ & ٢ \\ ٢١٠ - ٥٢٢٣ + ٢٥ - ٥٢٩ - ٢٢٠ - ٥٢٦ + ٥٢ - ٥ + ٥٢٢٢ \\ ٢ & ٣ & ٢٢ & ٢ & ٢ & ٢٣ & & \\ ٥٢٣ + ٥ - ٥٢٥ + ٥٢٤ + ٥٢٣ - ٢٥ + ٥٢٣١ - ٥٢٧ - \\ ٢٥ - ٥٢ & \text{فترتب كلاهما تين الكميّتين بالنسبة للدرجات التنازلية} \\ \text{للحرف } ح & \text{وتجتمع الحروف المشتبهة على حرف الترتيب بدرجة واحدة} \\ & \text{وصورة العمل هكذا} \end{array}$$

\*(٢٦)\*

$\begin{array}{r} 2 \\ 52 - 5 + 7 \\ \hline 1 + 7 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 52 - 5 + 7 \\ \hline 1 - \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 52 - 5 + 7 \\ \hline 4 + \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 52 - 5 + 7 \\ \hline 1 - \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 52 - 5 + 7 \\ \hline 10 - \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 52 - 5 + 7 \\ \hline 10 - \end{array}$
--	--	--	--	---	---

$\begin{array}{r} 2 \\ 52 - 5 + 7 \\ \hline 5 3 + \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 52 - 5 + 7 \\ \hline 5 3 + \end{array}$
--	--

ثاني قسمة جزئية

اول قسمة جزئية

$\begin{array}{r} 2 \\ 52 - 5 + 7 \\ \hline 5 3 + \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 52 - 5 + 7 \\ \hline 5 3 + \end{array}$
--	--

رابع قسمة جزئية

ثالث قسمة جزئية

$\begin{array}{r} 2 \\ 52 - 5 + 7 \\ \hline 5 3 + \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 52 - 5 + 7 \\ \hline 5 3 + \end{array}$
--	--

فيلزم أن يكون الحد الاول من خارج القسمة محتويا على  $7^3$  ولتحصيل مكرره يقسم مكرر  $56 - 10$  على مكرر  $53 - 5$  (وهذه اول قسمة جزئية) وناتجها  $2$  فاذن يكون الحد الاول من خارج القسمة  $7^3$  ثم يضرب المقسوم عليه في  $7^3$  أي يضرب  $53$  في  $7^3$  فيحصل  $56 - 10$

وهذا

وهذا الحد يتماهى مع أول حد من المقسوم وحيث أن حاصل ضرب الباقي من المقسوم عليه في ٣ يقبل الاختصار مع الجزء التالى من المقسوم

$$\begin{array}{r} \text{يؤل هذا الحاصل بعد اختصاره الى} \\ 20 - \\ + 27 \\ 9 - \end{array}$$

وحيث ان الجزء التالى من خارج القسمة يجب أن يكون محتويا على

فلتعيين مكسره يقسم ٢٠ - ٢٧ + ٩ - على ٣ - ٥ (وهذه هي نافي قسمة جزئية) ثم يجرى العمل على هذا المنوال

(٢٢) وهناك حالة شهيرة في التقسيم الجبرى وهى الحالة التى يكون فيها

المقسوم عليه غير محتوى على حرف الترتيب للمقسوم كما اذا اريد تقسيم الكمية

ذات الحدود  $أ س + ب س + ج على م$  فالمكررات  $أ و -$

$و ج م$  يمكن أن تكون كميات ذات حدود وحيث أن  $م$  لا يحتوى

على الحرف  $س$  يكون خارج القسمة محتويا على حرف الترتيب بدرجة

الكائن بها فى المقسوم وبناء عليه يكون بهذه الصورة  $أ س + ب س + س$

$ج$  فاذن لا يحتاج الاليعين المكررات  $أ و -$  و  $ج$  فخواصل

ضرب المقسوم عليه فى حدود خارج القسمة تكون  $م أ س + م س + م س$

$و م ج$  وهى خواصل لا يقبل بعضها الاختصار مع الآخر لانها محتوية على

$س$  باسس مختلفة فتكون حينئذ مساوية للاجزاء المقابلة لها من المقسوم

كل لتظهره فيحدث حينئذ بجذف المضارب المشتركة  $س و س$  الخان

$$\begin{array}{lcl} أ م = أ & & أ = \frac{أ}{م} \\ س م = س & \text{وينتج من ذلك} & س = \frac{س}{م} \\ ج م = ج & & ج = \frac{ج}{م} \end{array}$$

نفينئذ يقال متى كان المقسوم عليه جاليا من حرف ترتيب المقسوم يلزم لا مكان





ينتج  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$  وهذا هو المسمى بوضع  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$  مضروباً  
مشتركا

وإذا اريد جعل  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$  مضروباً مشتركاً في المقدار  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$   
—  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$  يحدث  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$  (٢٤)

(٢٤) فاضل الكميتين المرفوعتين الى قوة واحدة يقبل القسمة على الفرق  
بينهما غير مرفوعتين لانه اذا ابتدأ بتقسيم  $\frac{2}{3}$  على  $\frac{2}{3}$  —  $\frac{2}{3}$  على  $\frac{2}{3}$   
بان وضعت صورة العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$$

نتج  $\frac{2}{3}$  وهو اول حد من خارج القسمة وكان الباقي الاول  $\frac{2}{3}$  —  $\frac{2}{3}$   
وحيث أن المقسوم يساوى المقسوم عليه مضروباً في خارج القسمة زائداً  
الباقي يحدث

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

وإذا وضع  $\frac{2}{3}$  مضروباً مشتركاً في الحدين الآخرين  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$  و  $\frac{2}{3}$   
حدث  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$  (٢٥)

ومن المعلوم أن  $\frac{2}{3}$  —  $\frac{2}{3}$  حاصل جمع للجزئين (٢٥)  $\frac{2}{3}$  —  $\frac{2}{3}$

و  $\frac{2}{3}$  —  $\frac{2}{3}$  يمكن الجزء الاول وهو  $\frac{2}{3}$  —  $\frac{2}{3}$  قابلاً

للقسمة على  $\frac{2}{3}$  —  $\frac{2}{3}$  فاذا كان الجزء الثاني  $\frac{2}{3}$  —  $\frac{2}{3}$  قابلاً

للقسمة على  $\frac{2}{3}$  —  $\frac{2}{3}$  كان حاصل جمعهما  $\frac{2}{3}$  —  $\frac{2}{3}$  كذلك لكن الجزء

الثاني  $\frac{2}{3}$  —  $\frac{2}{3}$  حاصل ضرب مركب من مضروبين فيمكن جعل

\* (٣٠) \*

هذا الحاصل قابلا للقسمة على  $\gamma - \delta$  أن يكون احد مضروبية  
 $(\gamma^1 - \delta^1)$  قابلا للقسمة على  $\gamma - \delta$  فاذا كان  $\gamma^1 - \delta^1$  قابلا للقسمة على  $\gamma - \delta$  فـ

قابلا للقسمة على  $\gamma - \delta$  يكون  $\gamma^1 - \delta^1$  كذلك أعني اذا كان  
 فاضل الكميتين المرفوعتين الى القوة واحدة قابلا للقسمة على فاضل الكميتين  
 بلارفع يكون فاضل الكميتين المذكورتين مرفوعتين لقوة اعلى بواحد من  
 قوتيهما الاصلية قابلا للقسمة على فاضل الكميتين بلارفع

وحيث علم أن الفاضل  $\gamma^2 - \delta^2$  يقبل القسمة على  $\gamma - \delta$  لأن  $\gamma^2 - \delta^2 = (\gamma + \delta)(\gamma - \delta)$  يكون  $\gamma^3 - \delta^3$  قابلا للقسمة على  $\gamma - \delta$   
 $\gamma^4 - \delta^4$  فحينئذ  $\gamma^4 - \delta^4$  يقبل القسمة على  $\gamma - \delta$  وهكذا  
 فتكون هذه القاعدة عامة الاثبات

فحينئذ اذا اجرى العمل على  $\gamma^6 - \delta^6$  يحدث  
 $\gamma^6 - \delta^6 = \gamma^5 + \gamma^4\delta + \gamma^3\delta^2 + \gamma^2\delta^3 + \gamma\delta^4 + \delta^5$  وعلى هذا  
 المتوال يكون

$$\gamma^6 - \delta^6 = \gamma^5 + \gamma^4\delta + \gamma^3\delta^2 + \gamma^2\delta^3 + \gamma\delta^4 + \delta^5$$

فينتج من كيفية تكوين خارج قسمة  $\gamma^6 - \delta^6$  على  $\gamma - \delta$   
 اولاً ان جميع حدود خارج القسمة تكون موجبة  
 وثانياً أن جميع المكررات تكون مساوية للوحدة  
 وثالثاً أن اس حرف  $\gamma$  يتناقص بواحد على التوالي من ابتداء الحد  
 الاول الذي اسه م - ١ الى الحد الاخير الذي اسه صفر  
 ورابعاً أن اس حرف  $\delta$  يتزايد بواحد من ابتداء الحد الاول الذي اسه  
 صفر الى الحد الاخير الذي اسه يكون مساوياً (م - ١)



٢-م<sup>١</sup> ويكون الحد الثاني من خارج القسمة (ح + ح) ٢-م<sup>٢</sup>  
والحد الاول من الباقي التالى له هو (ح + ح + ح + ح) ٢-م<sup>٣</sup> وهذه  
الكيفية تدام العملية  
فتى توصل الى باقى هذه الاول لا يحتوى الاعلى ٢-م<sup>٤</sup> باس مساو للواحد  
كان لهذا الحد الاول من هذا الباقي مكرر بهذه الصورة  
١-م<sup>١</sup> ٢-م<sup>٢</sup> ٣-م<sup>٣</sup>  
ح + ح + ح + ح + ... + ر والحد التالى لخارج القسمة يكون  
١-م<sup>١</sup> ٢-م<sup>٢</sup> ٣-م<sup>٣</sup>  
ح + ح + ح + ح + ... + ر وبناء عليه يكون الباقي التالى لهذا الحد هو  
٢-م<sup>١</sup> ١-م<sup>٢</sup> ٢-م<sup>٣</sup>  
ح + ح + ح + ح + ... + ر + ر + ل  
وهو باق لا يخالف الكمية ذات الحدود المفروضة الا بوضع ح فيه  
بدل ٢-م<sup>١</sup> فاذا اعتبر الفرض الاول المتقدم أى فرض ٢-م<sup>١</sup> = ح الذى  
به تؤل الكمية الى صفر يكون الباقي وهو ح + ح + ح + ح + ... + ل  
مساويا للصفر ويكون التقسيم ممكنا

\* (فى الكسور) \*

(٢٧) الكسر الجبرى بدل كما فى الحساب على خارج قسمة البسط على  
المقام فعلى هذا يكون كسر ح - د الاعلى خارج قسمة ح على د  
والبراهين التى اجريت فى علم الحساب لبيان القواعد المملوكة فى العمليات  
المتعددة للكسور ناتجة من التعريف السابق أو من تعريف يكون هذا  
التعريف نتيجة له

وقد فرض فى هذه البراهين أن الحدين ح و د عددان صحيحان لكن هذان  
الحدان قد يكونان فى علم الجبر كسرين فاذن يجب علينا أن نبين جميع القواعد  
المتعلقة بالكسور فقول

الاولى اذا ضرب بسط كسر فى كمية ما أو قسم عليها كان ذلك الكسر

مضروبا

مضروباً في هذه الكمية أو مقسوماً عليها فإذا فرض  $\frac{7}{5}$  مثلاً كسراً معلوماً  
ورمز له بالحرف  $ل$  وضرب بسطه في  $٥$  كان ذلك الكسر مضروباً في  $٥$  لانه  
ينتج من  $\frac{7}{5} = ل$  أن  $٥ = ل \times ٥$  فإذا ضرب طرفاً هذه المتساوية  
في  $٥$  يحدث  $٥ = ل \times ٥$  ومنها ينتج  $\frac{٥}{٥} = ل = \frac{٥}{٥} \times \frac{٥}{٥}$   
ومثل هذا يقال في  $\frac{٥}{٥} = ل : ٥$

الثانية إذا ضرب مقام كسر في كمية واحدة أو قسم عليها كان ذلك الكسر  
مقسوماً على هذه الكمية أو مضروباً فيها وعلى هذا يبرهن بمثل ما تقدم  
الثالثة إذا ضرب هذا الكسر في كمية واحدة أو قسمها عليها فقيمة الكسر  
لا تتغير ويعلم من ذلك أنه يمكن اختصار كسر بتقسيم حديه على مضروب  
مشترك احتوا عليه فحينئذ

$$\frac{٢}{٥} = \frac{٢٥}{٥٠}$$

ويعلم من ذلك أن القاعدة المستعملة في الحساب لتحويل كسور الى ذات  
مقام واحد يمكن استعمالها في الجبر فإذا أريد مثلاً تحويل الكسور  
 $\frac{٢}{٥}$  و  $\frac{٣}{٥}$  الى ذات مقام واحد كان الناتج المطلوب بعد اجراء  
العملية  $\frac{٢٥}{٥٠}$  و  $\frac{٣٥}{٥٠}$  وإذا أريد تحويل الكسور  
 $\frac{٢}{٥}$  و  $\frac{٣}{٥}$  الى ذات مقام واحد يقال حيث وجد  
للمقامات مضارب مشترك تختصر القاعدة العمومية بأن يبحث كافي  
الحساب عن المضاعف الاصغر المشترك للمقامات الثلاثة فيحلال أولاً كل من  
المقامات الى مضارب اولية فيحدث

$$\frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢٤}{١٢٥} \text{ و } \frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣٦}{١٢٥} \text{ و } \frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢٤}{١٢٥}$$

ثم يحصل حينئذ حاصل ضرب يحتوى على المضارب الاصلية المتقدمة باعلى  
اس موجود فيها هكذا

$$\frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٥} \times \frac{٢}{٥}$$

وهذا الحاصل هو المقام المشترك البسيط الذي يمكن اعطاؤه للكسور  
المفروضة فلم يبق الا ضرب حدى كل كسر من الكسور المتقدمة في خارج  
قسمة  $٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧ \times ٤٠$  على مقامه فاذن يضرب حدى الكسر  
الاول في  $٥ \times ٧ \times ٤٠$  والثاني في  $٤ \times ٧ \times ٤٠$  والثالث في  $٢ \times ٧ \times ٤٠$  فيحدث

$$\frac{٥ \times ٧ \times ٤٠}{٤٠} \quad \text{و} \quad \frac{٤ \times ٧ \times ٤٠}{٤٠} \quad \text{و} \quad \frac{٢ \times ٧ \times ٤٠}{٤٠}$$

الرابعة لطرح كسرين أو جملة كسور ذات مقام مشترك أو جمعهما  
تجرى عملية الطرح أو الجمع على البسوط ثم يعطى للناتج المقام المشترك  
لانه اذا أجرى العمل على الكسور  $\frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٥} - \frac{٥}{٧}$  مثلاً وفرض أن  
الناتج المطاوب  $م$  كان  $\frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٥} - \frac{٥}{٧} = م$  فحينئذ يضرب  
كل من الطرفين في  $م$  فيحدث

$$\frac{٢}{٣} م + \frac{٤}{٥} م - \frac{٥}{٧} م = م$$

$$\frac{٢م + ٤م - ٥م}{٣} = م$$

فاذا كانت مقامات الكسور المفروضة غير متحدة ابتدئ بتحويلها الى ذات  
مقام واحد ثم يجري عليها ما في القاعدة المتقدمة  
الخامسة لضرب كسر في آخر يضرب بسط أحدهما في بسط الآخر ومقامه  
في مقامه ويجعل الحاصل الثانى مقاما للحاصل الاول فاذا اريد ضرب  
 $\frac{٢}{٣}$  في  $\frac{٤}{٥}$  مثلاً بفرض أن  $ح$  رمز للكسر الاول و  $ك$  رمز للثانى  
يوجد  $ح = د ع$  و  $ه = و ك$  فاذن يكون

$$\frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٥} = د ع = و ك \quad \text{أو} \quad ح ه = د و ع ك \quad \text{فيكون}$$

$$\frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٥} = ح ه = د و ع ك \quad \text{أو} \quad \frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٥} = د و ع ك$$

وينتج من ذلك انه لضرب صحيح في كسر يضرب الصحيح في بسط الكسر ثم يجعل  
مقام الكسر المفروض مقاما لذلك الحاصل

السادسة لتقسيم كسر على كسر يضرب الكسر الذى هو عبارة عن المقسوم

في الكسر الذي هو عبارة عن المقسوم عليه مقلوبا فاذا فرض ان  $\frac{ج}{د}$  مقسوم  
على  $\frac{هـ}{و}$  فيجعل  $\frac{ج}{د} = ع$  و  $\frac{هـ}{و} = ز$  يكون  $د = ع ز$   
و  $هـ = و ز$  ومنها يحدث  
 $\frac{ج}{هـ} = \frac{ع ز}{و ز} = \frac{ع}{و}$  أو  $\frac{ج}{و ز} = \frac{ع}{و}$  أو  $\frac{ج}{د} : \frac{هـ}{و} = \frac{ج}{و}$   
وبمثل ذلك يبرهن على تقسيم الصحيح على كسر فيضرب الصحيح في الكسر  
مقlobا

\*(في الاسس السالبة)\*

(٢٨) متى وجد حرف من المقسوم أسه أقل من أسه في المقسوم عليه  
كانت القسمة مستحيلة فقسمة  $\frac{ج^٣}{ع^٥}$  على  $\frac{د^٥}{هـ^٥}$  مستحيلة لكنهم اتفقوا على  
تبيين خارج القسمة بكتابة حرف  $د$  بأس مساو للفاضل  $٥ - ٣ = ٢$  أي  
 $د^٢ = \frac{ج^٣}{هـ^٢}$  فاذن يكون  $\frac{ج^٣}{هـ^٢} = \frac{ج^٣}{د^٢}$   
وينتج من ذلك انه اذا وجد حرف ذو أس سالب كان ناتجا من عملية قسمة  
مستحيلة

(٢٩) الحرف ذو الاس السالب يساوى واحدا مقسوما على هذا  
الحرف باسه موجبا فاذا قسم  $\frac{ج^٣}{هـ^٣}$  على  $\frac{ج^٣}{هـ^٣}$  نحصل بمقتضى ما تقدم  
في (٢٨)

$$\frac{\frac{ج^٣}{هـ^٣}}{\frac{ج^٣}{هـ^٣}} = \frac{ج^٣}{هـ^٣} \text{ وحيث أن } \frac{ج^٣}{هـ^٣} = \frac{ج^٣}{هـ^٣} = \frac{ج^٣}{هـ^٣}$$

يقال اذا قسم  $\frac{ج^٣}{هـ^٣}$  من حدى هذا الكسر على  $\frac{ج^٣}{هـ^٣}$  حدث  $\frac{ج^٣}{هـ^٣}$

$$\frac{١}{\frac{ج^٣}{هـ^٣}} = \frac{١}{\frac{ج^٣}{هـ^٣}} \text{ معلوم أن } \frac{١}{\frac{ج^٣}{هـ^٣}} \text{ مساو } \frac{ج^٣}{هـ^٣} \text{ فيكون}$$

$$\frac{١}{\frac{ج^٣}{هـ^٣}} = \frac{١}{\frac{ج^٣}{هـ^٣}}$$



(٣٠) قد برهننا سابقا في قاعدة الاسس على ضرب الحدود ذات الاسس الموجبة فقط والغرض الآن البرهنة على أن هذه القاعدة توافق الاسس السالبة فاصل  $a^m$  في  $a^{-m}$  مثلا يكون مساويا  $a^{-m}$  لان  $a^m \times a^{-m} = a^0 = 1$  وبمثل هذا يبرهن على الحالات الاخرى  $a^m \times a^{-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$

فحينئذ قاعدة الاسس الموجبة في تقسيم الحدود توافق الاسس السالبة لان هذه القاعدة ناتجة من قاعدة الضرب بيان ذلك بالامثلة أن يقال

لضرب  $a^m$  في  $a^{-n}$  يقال  $a^m \times a^{-n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

ولقسمة  $a^m$  على  $a^{-n}$  يجري العمل هكذا  $a^m : a^{-n} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n}$

ولقسمة  $a^m$  على  $a^n$  يجري العمل هكذا  $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

ولايجاد حاصل ضرب كيتين مشتقتين على حدود كسرية او خارج قسمتهما على بعض تحويل الكميتان الى اخريين صحيحتين باستعمال الاسس السالبة من غير تغيير كمررات حدودها الرقبة ثم ترتب الاسس المذكورة باعتبارها اعدادا اصغر من صفر تاخذ في الصغر كلما زادت في المقدار المطلق ثم تجري

عليها طرق الضرب أو القسمة فاذا اريد مثلا ضرب  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}$  في  $a^2$  بوضعان هكذا

\* (٣٧) \*

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & ٢- & & ١- & & ٢- \\
 & & م & - & م & - & م \\
 & & ٢ & - & ١ & + & ٢ \\
 & & م & + & م & + & م
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 & & ١- & & ٢ & & ٣ \\
 & & م & - & م & + & م \\
 & & ٢ & + & م & + & م \\
 & & ٢ & + & م & + & م
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 & & ٢- & & ١- & & ٢ \\
 & & م & - & م & + & م \\
 & & ٢ & + & م & + & م \\
 & & ٢ & + & م & + & م
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 & & ٢- & & ٢- & & ١- \\
 & & م & + & م & + & م \\
 & & ٢ & + & م & + & م \\
 & & ٢ & + & م & + & م
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 & & ٢- & & ٢- & & ١- \\
 & & م & + & م & + & م \\
 & & ٢ & + & م & + & م \\
 & & ٢ & + & م & + & م
 \end{array}
 \end{array}$$

فيشاهد أن الحاصل مرتب من نفسه وان حده الاول والاخير ليسا مختصرين وان الاول حادث من ضرب الحدين الاولين في بعضهما والاخير من ضرب الاخيرين في بعضهما ومثل ذلك يجري في عملية التقسيم

\* (الباب الثاني) \*

\* (في المعادلات والمسائل التي بدرجة اولى) \*

(٣١) الكميتان المتساويتان اللتان لا يحتويان الاعلى اعداد معلومة مبنية بحروف بسميان متساوية وذلك كالتساوية  $ج + و = هـ - و$  التي فيها  $ج$  و  $و$  و  $هـ$  و  $و$  دالة على كميات معلومة والمتساوية متى تحققت بمقادير الحروف المعلومة أو المجهولة الداخلة فيها كائنة ما كانت تسمى متطابقة وذلك كالتطابقة

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & ٢ & & ٢ & & ٢ \\
 & & ج & - & و & = & ج & + & و \\
 & & ٢ & - & و & = & ٣ & - & و \\
 & & ٢ & + & و & = & ٢ & + & و
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 & & ٢ & & ٢ & & ٢ \\
 & & ج & - & و & = & ج & + & و \\
 & & ٢ & - & و & = & ٣ & - & و \\
 & & ٢ & + & و & = & ٢ & + & و
 \end{array}
 \end{array}$$

والتساوية التي لا يتحقق تساويها الا بمقادير مخصوصة للمجاهيل الداخلة فيها تسمى معادلة فينئذ  $٣ - و = ٥ = ٧$  معادلة لان تساويها لا يتحقق بأي مقدار فرض المجهول  $و$

كل من الكميتين المفصولتين عن بعضهما في كل متساوية بالعلامة = تسمى طرفا لكن الكمية التي على اليمين تسمى الطرف الاول والتي على اليسار

\* (١٠) \*

تسمى الطرف الثاني -

المعادلة الرقمية ما كانت الكميات المعلومة فيها مبينة بأرقام والحرفية ما كانت الكميات المذكورة فيها مبينة بحروف فحينئذ  $٣ م - ٥ = ٧$  معادلة رقمية و  $٣ م - ٧ = ٥$  معادلة حرفية

وحل المعادلة هو البحث عن المقدار الذي اذا وضع بدل مجهولها صيرها متطابقة ويسمى هذا المقدار بحل المعادلة

متى تحققت جملة معادلات بجملة واحدة من مقادير مجاهيلها تسمى هذه المقادير بحل جملة هذه المعادلات فحل هذه المعادلات هو البحث عن المقادير التي اذا وضعت بدل المجاهيل صيرتها متطابقة

وهذه المعادلات تمتاز احداها عن الاخرى بدرجةها

واذا جعلت اساس مجاهيل كل حد من معادلة فاعظم حواصل الجمع يدل على درجة المعادلة فحينئذ معادلة  $٣ م - ٥ = ٧$  معادلة ذات درجة

اولى ومعادلة  $٥ م - ٢ م = ٩$  معادلة ذات درجة ثانية

ومعادلة  $٢ م - \frac{٤}{٩} = ٨$  معادلة ذات درجة ثالثة

وهذه القضية غير مطردة متى كان المجهول داخلا في المعادلة مقام الكسر اذ لا يمكنكم بدرجة المعادلة في هذه الحالة الا بعد حذف المقامات بالطريقة الآتية

وتتميز المعادلات المتحدة الدرجة عن بعضها بعدد مجاهيلها

واسهل المعادلات حلا المعادلة ذات الدرجة الاولى والمجهول الواحد

\* (في بيان المعادلة ذات الدرجة الاولى) \*

\* (والمجهول الواحد) \*

(٣٢) ولندكر بعض قواعد متعارفة فنقول

تعاذل المعادلة لا يتغير

١٠ أولا اذا ضم لكل من طرفيها كمية واحدة او طرحت من كل منهما  
وثانيا اذا ضرب كل من طرفيها في كمية واحدة او قسم كل منهما عليها  
وثالثا اذا جمعت معادلتان الى بعضهما بان جمع الطرف الاول للاول  
والثاني للثاني او طرحتا من بعضهما او ضربتا في بعضهما او قسمتا على بعضهما  
فحيث تقرر ذلك يجب ان نشغل بالتحويلين المهمين فنقول

الاول كل معادلة كالمعادلة  $٥س - ٤ = ٢س + ٧$  يلزم حلها ان  
يكون المجهول في الطرف الاول منها ولتحصيل ذلك يطرح من كلا طرفيها  
 $٢س$  فتصير  $٥س - ٤ = ٢س - ٤ + ٧ = ٧$  ثم يضم الى كل من طرفيها  
 $٤$  فتصير  $٥س = ٢س + ٧ + ٤$  فالحد  $٢س$  الذي كان  
في الطرف الثاني موجبا صار في الطرف الاول سالبا و  $٤$  الذي كان  
في الطرف الاول سالبا صار في الطرف الثاني موجبا فاذن يلزم لتحويل حد  
من طرف الى طرف تغيير علامته فقط

والثاني كل معادلة كالمعادلة  $\frac{٢س}{٣} = ٧ + \frac{٤}{٥}$  يلزم حلها ان  
تُحذف المقامات واذا تحول اولا الكسور والعدد الصحيح  $٧$  الى ذات  
مقام واحد كما عرف من القواعد المعلومة فتصير  $\frac{٢س}{٣} = \frac{٣٥}{١} + \frac{٤}{٥}$  ثم يضرب كل من طرفي هذه المعادلة في  $٣٠$  لحذف  
المقام فتصير

$$٢٠س = ٢٤ + ٢١٠ = ١٥س$$

وقد يتوصل لهذا الناتج من اول الامر بدون كتابة المقام المشترك أي أنه  
لحذف مقامات معادلة يضرب بسط كل كسر في حاصل ضرب مقامات  
الكسور الاخر ثم يضرب الصحيح في حاصل ضرب المقامات

\*(تنبيه)\*

هذه القاعدة تختصر في الحالة التي يكون فيها للمقامات المعلومة مضارب  
مشتركة

$$\text{فالمعادلة } \frac{٥س}{٦} - \frac{٣}{٤} = \frac{٢س}{٩} + ٧ \text{ المحتوية على مقامات ذات مضارب}$$

\*(٤٠)\*

مشتركة يسعمل فيها تحويل جميع الكسور والعديد الصحيح الى ذوات  
مقام واحد باخذ المكرر الاصغر المشترك وهو ٣٦ مقاما مشتركا لجميع  
المقامات فاذن يكفي ضرب الصحيح في ٣٦ ثم ضرب حدى كل كسر  
في خارج قسمة ٣٦ على مقام هذا الكسر فيحدث بعد حذف المقام  
المشترك

$$٣٠ م - ٢٧ = ٨ م + ٢٥٢$$

فيثبت يلزم حذف مقامات معادلة ذات مضارب مشتركة أن يبحث عن  
المكرر المشترك الاصغر لهذه المقامات ويضرب العدد الصحيح فيه ثم يضرب  
بسط كل كسر في خارج قسمة المكرر المذكور على مقام هذا الكسر  
(٣٣) لتطبيق هذه القاعدة على حل المعادلة

$$\frac{٣ م}{٤} + ٤ = \frac{١}{١٠} - \frac{٧(٣ م - ٢٥٢)}{١٥}$$

تجرى عملية الضرب المبينة في بسط الكسر الاول فيتحصل

$$\frac{٣ م}{٤} + ٤ = \frac{١}{١٠} - \frac{٢١ م - ٢١٠}{١٥}$$

ثم تحذف المقامات بملاحظة العدد ٦٠ مكررا مشتركا أصغر للاعداد  
١٥ و ١٠ و ٤ فيحدث

$$٥٦ م - ٨٤ = ٦ + ٢٤٠ م + ٤٥ م$$

ثم نحول الحدود المجهولة الى الطرف الاول والحدود المعلومة الى الثانى فتصير  
المعادلة

$$٥٦ م - ٤٥ م - ٨٤ = ٦ + ٢٤٠ م$$

وبعد الاختصار تصير

$$١١ م = ٣٣٠ وبقسمة طرفيها على ١١ يحدث$$

م =  $\frac{٣٣٠}{١١}$  أى م = ٣٠ ولتحقيق هذا المقدار يوضع

العدد ٣٠ في المعادلة  $\frac{٣ م}{٤} + ٤ = \frac{١}{١٠} - \frac{٧(٣ م - ٢٥٢)}{١٥}$  بدل

م فتصير  $\frac{٧(٣ - ٦٠)}{١٥} - \frac{١}{١٠} = ٤ + \frac{٩}{٤}$  ومنها يستنتج

$$\frac{٧ \times ٥٧}{١٥}$$



\* (٤٢) \*

$$\frac{2^2}{3} = \frac{(2^3 - 2^2) \cdot 2^2}{(2^3 - 2^2) \cdot 3} = \frac{2^2}{3}$$

ولتحقيق هذا المقدارية غير المجهول  $\frac{2^2}{3}$  في المعادلة المقروضة بمقداره وهو

$\frac{2^2}{3}$  وبهذا التغير يعلم هل المعادلة متطابقة ام لا

\* (قاعدة عمومية) \*

لحل معادلة ذات درجة اولى ومجهول واحد يلزم

اولا اجراء عملية الضرب الكائن فيها ان وجدت ثم حذف المقامات  
وثانيا تحويل الحدود المشتتة على الجاهيل الى الطرف الاول والحدود  
المعلومة الى الطرف الثاني

وثالثا اختصار الحدود المجهولة لتصبح حدا واحدا ان كانت المعادلة رقية  
وجعل المجهول مضروبا مشتركا ان كانت المعادلة حرفية

ورابعا تقسيم طرفها الثاني على المكرر الرقى أو الحرفي للمجهول فنخرج  
القسمة يكون مقدار المجهول المذكور

(٣٤) يمكن تغيير علامات معادلة بدون أن يتغير التساوى الواقع بين  
طرفيها لانه لو فرضت معادلة  $5 - 2 = 3 + 0$  وحوات  
جميع حدود الطرف الاول الى الثاني وحدود الثاني الى الاول لصارت  
 $3 - 5 = 0 + 2$  وبعكس الطرفين يحدث  
 $0 - 2 = 3 - 5$  وهي لا تخالف المعادلة الاولى  
الابتغير علامات جميع حدودها

\* (في المعادلات ذات الدرجة الاولى ووجه الجاهيل) \*

(٣٥) كل معادلة ذات مجهولين لها حلول غير منتهية العدد لانه اذا فرض  
لاحد المجهولين مقدار اختياري حدث للمجهول الآخر مقدار مطابق له  
فاذا فرضت معادلة  $3 - 2 = 0$  وجعل فيها  $3 = 1$   
حدث  $2 = 1 + 0 = 1$  فاذن يكون مقدار  $2 = 1$  ومقدار  $3 = 1$

صفة = ١ حل للمعادلة وكلما فرض للمجهول ص مقدار ما وجد للمجهول ص مقدار جديد فيكون للمعادلة المفروضة حلول غير منتهية العدد

(٣٦) ولنشتغل الآن بحل معادلتين ذاتي مجهولين بطرق أربع فنقول الطريقة الاولى طريقة الوضع وهي حذف المجهول بوضع مقداره المستخرج من المعادلة الاولى في الثانية فاذا افترضت معادلتان

$$٣ \text{ ص} + ٤ \text{ ص} = ١٠ \text{ و}$$

$$٥ \text{ ص} - ٧ \text{ ص} = ٣$$

واريد حذف احدا المجهولين منهما ما يستخرج من احدهما مقداره بفرض الآخر معلوما فاذا استخرج مقدار ص من الاولى بفرض ص معلوما حدث  $\frac{٣-١٠}{٤} = \text{ص}$  وبوضع هذا المقدار في المعادلة الثانية تصير محتوية على مجهول واحد هكذا

$$٥ \text{ ص} - \frac{٧٠-٣١}{٤} = ٣$$

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين بطريقة الوضع أن يستخرج من احدهما مقدار احدا المجهولين بفرض الآخر معلوما ثم يغير هذا المجهول بمقداره في المعادلة الثانية

الطريقة الثانية طريقة التساوي او المقارنة وهي حذف احدا المجهولين من المعادلتين باستخراج مقداره من كل منهما وتسوية هذين المقدارين ببعضهما فاذا اريد حذف احدا المجهولين ص من المعادلتين المذكورتين يستخرج مقداره من كل منهما بفرض المجهول الآخر معلوما فيحدث من احدهما ص =  $\frac{٣-١٠}{٤}$  ومن الاخرى ص =  $\frac{٣-٥}{٧}$

وبتساوي هذين المقدارين تحدث معادلة ذات مجهول واحد هكذا

$$\frac{٣-١٠}{٤} = \frac{٣-٥}{٧}$$

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين ذاتي مجهولين بواسطة طريقة التساوي أن يستخرج من كل منهما مقدارا احدا المجهولين بفرض الآخر معلوما ثم يسوى هذان المقداران ببعضهما



الطريقة الثالثة طريقة الحذف بواسطة الجمع أو الطرح  
فإذا فرض أن المطلوب حذف المجهول  $x$  من المعادلتين

$$5x - 3x = 9 \quad \text{و}$$

$$2x + 3x = 12$$

وجب التنبيه على أن  $x$  له مكرر متحد في المعادلتين المذكورتين  
ذو علامتين متخالفتين فلحذفه يكفي جمع هاتين المعادلتين إلى بعضهما طرفاً إلى  
طرف وبهذا تحدث معادلة محتوية على مجهول واحد هكذا

$$5x + 2x = 9 + 12$$

وإذا فرض أن المطلوب حذف المجهول  $x$  من المعادلتين

$$3x + 4x = 10 \quad \text{و} \quad 5x - 7x = 3$$

وجب أولاً أن يجعل مكرر  $x$  فيهما واحداً بضرب طرفي المعادلة الأولى  
في مكرر  $x$  من المعادلة الثانية وهو ٧ ثم ضرب طرفي المعادلة  
الثانية في مكرر  $x$  من الأولى وهو ٤ فيحدث

$$21x + 28x = 70 \quad \text{و}$$

$$20x - 28x = 12$$

فإذا جمعت هاتان المعادلتان إلى بعضهما حدثت معادلة ذات مجهول واحد

$$\text{هكذا} \quad 21x + 20x = 70 + 12$$

وإذا اتخذت علامة المجهول  $x$  في كل من المعادلتين أجرى طرح  
المعادلتين من بعضهما طرفاً من طرف عوض جمعهما

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين ذاتي مجهولين بطريقة  
الجمع أو الطرح أن يجعل مكرراً المجهول المراد حذفه من كل من المعادلتين  
واحداً وطريق الوصول إلى ذلك أن يضرب طرفاً المعادلة الأولى في مكرر  
هذا المجهول من الثانية ثم يضرب طرفاً الثانية في مكرر المجهول المذكور  
من الأولى ثم يجمع المعادلتان على بعضهما أو تطرح احدهما من الأخرى  
بحسب اختلاف واتحاد علامته في كل من المعادلتين المفروضتين

\* (٤٥) \*

\* (تأنيده) \*

الفرض من ضرب طرفي كل من المعادلتين في مكرر المجهول المراد حذفه  
تصير المعادلتين محتويتين على هذا المجهول بكرر واحد ويمكن الوصول  
الى ذلك بطريقة مختصرة عندما يكون لمكرري هذا المجهول مضروب مشترك  
فاذا فرض أن المراد حذف  $\text{صه}$  من المعادلتين

$$٥ \text{ صه} + ٦ \text{ صه} = ٢٨ \text{ و}$$

$$٧ \text{ صه} + ٨ \text{ صه} = ٣٨$$

فالمكرران ٦ و ٨ حيث أن لهما مضربا مشتركا يبحث عن المقسوم  
الاصغر لهما فيوجد ٢٤ وحينئذ يسهل تحويل المعادلتين لتصيرا  
محتويتين على المجهول  $\text{صه}$  بكرر ٢٤ بضرب طرفي المعادلة الاولى  
في ٤ الذي هو خارج قسمة ٢٤ على ٦ ثم ضرب طرفي المعادلة  
الثانية في ٣ الذي هو خارج قسمة ٢٤ على ٨ فيحدث

$$٢٠ \text{ صه} + ٢٤ \text{ صه} = ١١٢ \text{ و}$$

$$٢١ \text{ صه} + ٢٤ \text{ صه} = ١١٤$$

وهذه الكيفية المختصرة هي المشاهدة في علم الحساب في كيفية تحويل الكسور  
الى كسور اخصر مقاما مشتركا

فالقاعدة التي يراد سلوكها هنا عين التي هناك  
الطريقة الرابعة طريقة المكررات غير المعينة

فاذا فرضت معادلتان  $٥ \text{ صه} + ٦ \text{ صه} = ٢٨$  و  $٧ \text{ صه} + ٨ \text{ صه}$   
 $= ٣٨$  تضرب حدود المعادلة الاولى في م ثم تجمع الثانية اليها طرفا الى  
طرف فيحدث

$$٥ \text{ م صه} + ٧ \text{ صه} + ٦ \text{ م صه} + ٨ \text{ صه} = ٢٨ \text{ م} + ٣٨$$

ثم يوضع  $\text{صه}$  و  $\text{صه}$  مضروبين مشتركين في الحدود المشتملة عليهما  
فيتحصل

$$(٥ \text{ م} + ٧) \text{ صه} + (٦ \text{ م} + ٨) \text{ صه} = ٢٨ \text{ م} + ٣٨$$

\* (١٢) \*

وانما نعين كمية م لاجل حذف احد المجهولين فاذا اريد حذف صـ  
مثلا يسوى مكرره بصفر هكذا

$٢م + ٨ = ٠$  ومنه يستخرج م  $= -\frac{٨}{٢} = -٤$  ثم  
تستعوض كيتا م و  $٢م + ٨$  في معادلة  $(٧ + ٥م) = ٣٨$   
 $+ (٨ + ٢م) = ٣٨$  بالمقدارين  $-\frac{٨}{٢}$  وصفر  
وبهذا تؤل الى  $(٧ + \frac{٢}{٣}) = ٣٨ + \frac{١١٢}{٣}$   
فاذن يكون المجهول صـ قد انحذف

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين بطريقة المكررات غير  
المعينة ان تضرب احدى المعادلتين في كمية ما غير معينة ثم يجمع الناتج الى  
المعادلة الاخرى طرفا الى طرف ثم يوضع كل مجهول مضروبا مشتركا  
في الحدود المشتبهة عليه ثم يسوى مكررا المجهول المراد حذفه بصفر  
فيصير محذوفا ثم تستعوض الكمية غير المعينة بمقدارها المستخرج من الفرض  
المتقدم

\*(تنبيه)\*

اسهل الطرق الاربعة في العمل طريقة الجمع أو الطرح لانها لا تحدث مقاما  
في المعادلة الناتجة من الحذف غير أن طريقة الوضع تستعمل بكثرة عند  
ما يكون مكررا المجهول المراد حذفه مساويا لواحد في احدى المعادلتين  
ذاتي المجهولين

(٣٧) حل معادلتين ذاتي مجهولين ودرجة اولى كمعادلتين  
 $٧م - ٨ص = ٥$  و  $٥م - ١٢ص = ٩$  يحذف المجهول  
صـ بضرب المعادلة الاولى في ٣ والثانية في ٢ ثم تطرح الثانية  
من الاولى فيحدث

$$١١م = ٣٣ \text{ ومنها يستخرج } م = \frac{٣٣}{١١} = ٣$$

ولا استخراج مقدار المجهول صـ يوضع مقدار المجهول مـ بدله  
في احدى المعادلتين فيوضع في الاولى مثلامقدار مـ بدله فتصير

٢١ - ٨ ص = ٥ ومنها يحدث ص =  $\frac{٥-٢١}{٨} = ٢$   
 فالقاعدة العمومية لحل معادلتين ذاتي مجهولين ودرجة اولى أن يحذف  
 احد المجهولين منهما فنتج معادلة ذات مجهول واحد يستخرج منها مقدار  
 هذا المجهول ثم يوضع مقداره بدله في احدى المعادلتين فتؤول الى معادلة  
 محتوية على المجهول الثاني ثم يستخرج منها مقداره  
 (٣٨) وبقتضى ما ذكر يسهل حل ثلاث معادلات كل منها ذات ثلاثة  
 مجاهيل فاذا فرض مثلا

$$٥ ص - ٨ ص + ٣ ع = ١٩ \text{ و}$$

$$٢ ص + ٣ ص - ٦ ع = ٩ \text{ و}$$

$$٧ ص - ٢ ص - ٢ ع = ٧$$

يحذف ع من المعادلة الاولى والثانية بضرب الاولى في ٢ ثم ضم الناتج  
 الى الثانية فيحدث

$$١٢ ص - ١٣ ص = ٢٩ \text{ (١)}$$

ثم يحذف ع من المعادلة الثانية والثالثة بضرب الثالثة في ٣ ثم طرح  
 الثانية من الحاصل فيحدث

$$١٩ ص - ٩ ص = ١٢ \text{ (٢)}$$

ثم يحذف المجهول ص من المعادلتين (١) و (٢) ذاتي الدرجة الاولى  
 والمجهولين بأن تضرب الاولى في ٩ والثانية في ١٣ ثم تطرح الاولى  
 من الثانية فيحدث

$$١٣٩ ص = ٤١٧ \text{ ومنها يحدث ص} = \frac{٤١٧}{١٣٩} = ٣$$

ثم يستخرج مقدار المجهول ص بوضع مقدار ص عوضا عنه في احدى  
 المعادلتين (١) و (٢) فيحدث

$$٣٦ - ١٣ ص = ٢٩ \text{ ومنها ينتج}$$

$$ص = \frac{٣٦+٢٩}{١٣} = ٥$$

ثم لاستخراج مقدار ع بوضع في احدى المعادلات الثلاث المستقلة كل منها

على الثلاثة مجاهيل مقدار المجهول مـ ومقدار المجهول حـ بدلها مقتول  
 المعادلة المذكورة الى معادلة محتوية على المجهول ع فقط فاذا وضع مثلا  
 بدل مـ و حـ مقدارهما في المعادلة الثالثة آلت الى  $٢١ - ١٠ - ٢ = ٤$   
 $٧ = ٤$  ومنها يحدث  $٧ = ٤ = \frac{٧-١٠-٢}{٣} = ٤$  فالقاعدة  
 العمومية لحل ثلاث معادلات كلاها ذات ثلاثة مجاهيل ودرجة اولى ان  
 يحذف احد المجاهيل من احدى المعادلات مع كل من المعادلتين الاخرتين  
 على التوالي فيتوصل الى معادلتين كلاهما ذات مجهولين ثم يحذف المجهول  
 الثانى من هاتين المعادلتين فتحصل معادلة ذات مجهول واحد فيستخرج  
 مقداره منها ويوضع في احدى المعادلتين ذاتى المجهولين ثم يستخرج مقدار  
 المجهول الثانى ثم يوضع مقدارا هذين المجهولين المستخرجين في احدى  
 المعادلات ذوات الثلاثة مجاهيل ثم يستخرج مقدار المجهول الثالث منها  
 (٣٩) فبناء على هذه القاعدة يمكن التوصل الى القاعدة التى بها تحل اربع  
 معادلات كلاها ذات اربعة مجاهيل وخمس معادلات كلاها ذات خمسة  
 مجاهيل وهكذا لان العمل واحد فاذا ننتج قاعدة عمومية نذكرها فنقول

\*(قاعدة عمومية)\*

لحل جملة معادلات عددها م محتوية على مجاهيل عددها م ايضا يحذف  
 احد المجاهيل من المعادلة الاولى مع كل من المعادلات الاخر التى عددها  
 م - ١ على التوالي فتنتج جملة معادلات عددها م - ١ وهو عين عدد  
 مجاهيلها ثم يحذف مجهول ثان من احدى المعادلات التى عددها م - ١  
 مع كل من المعادلات التى عددها م - ٢ على التوالي فتنتج جملة معادلات  
 عددها م - ٢ وهو عين عدد مجاهيلها وهكذا يكون العمل الى أن يتوصل  
 الى معادلة ذات مجهول واحد فيستخرج منها مقداره ويوضع في احدى  
 المعادلتين المحتويتين على المجهولين الناتجين من العمل لاستخراج المجهول  
 الثانى ثم توضع مقادير المجاهيل التى عينت في المعادلات السابقة الناتجة من  
 العمل لاستخراج باقى المجاهيل الاخر الى أن يتوصل الى احدى المعادلات

التي عدد مجاهيلها م وهو عين عددها فتكون قد استخرجت مقادير  
المجاهيل على التوالي

(٤٠) قد فرضنا في البحث عن قاعدة حل معادلتين ذاتي مجهولين ان كليهما  
بهذه الصورة  $س + د صه = هـ$  اعني أن كليهما لا تحتوي  
الاعلى ثلاثة حدود صحيحة احدها مشتركة على  $س$  والثاني على  $صه$   
والثالث على المعلوم وأن الحد المعلوم في الطرف الثاني والحدين الآخرين  
في الطرف الاول فاذا كانت صورة المعادلتين متشعبة وجب حينئذ تحويلها  
الى الصورة البسيطة المتقدمة فيجب

اولا اجراء عمليات الضرب الموجودة بها وحذف المقامات  
وثانيا تحويل الحدود المشتركة على المجهولين الى الطرف الاول والحدود  
المعلومة الى الطرف الثاني

وثالثا اختصار حدود  $س$  وحدود  $صه$  أو وضع  $س$  و  $صه$   
مضروبين مشتركين في الحدود المشتركة عليهما ومثل ذلك يجري على جملة  
المعادلات ذوات المجاهيل الثلاثة أو الاربعة أو الخمسة وهلم جرا

(٤١) قد فرضنا في المعادلات التي حلت أن جميع المجاهيل داخلية في كل  
منها فان لم يكن جميعها داخلية في كل منها سميت معادلات غير تامة وحلها  
كل المعادلات التامة غير انه يجب الانتباه في انتخاب المجاهيل التي يراد حذفها  
ليتوصل الى معادلة ذات مجهول واحد في اقرب وقت وللحصول على ذلك  
يحذف المجهول الداخل في المعادلات بأقل عدد في معادلات

$$س + د صه - ع = ١٠ \quad و$$

$$س + د صه - ع = ١٢ \quad و$$

$$س + د صه - ع = ١٤ \quad و$$

$$س + د صه - ع = ٩$$

مثلا يشاهد أن المجهول ر داخل فيها بعدد اقل من غيره فيجب حذف  
هذا المجهول من هذه المعادلات بان يحذف من المعادلتين الاخيرتين

المحتويتين عليه تحدث معادلة مجردة منه فاذا ضمت هذه المعادلة الى  
المعادلتين الاوليين يحدث ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل هي

$$٢ س + ٣ ص - ٤ ع = ١٠ \quad \text{و}$$

$$٥ س - ٣ ع = ١٢ \quad \text{و}$$

$$٩ س - ١٢ ص - ٦ ع = ١١$$

وحيث أن المجهول  $ص$  داخل في هذه المعادلات بعدد اقل من غيره  
يحذف من المعادلة الاولى والثالثة ليتكون من حذفه معادلة مشتملة على  
مجهولين هما المجهولان الموجودان في الثانية وبكاتبتهما مع الثانية يحدث

$$٥ س - ٣ ع = ١٢ \quad \text{و}$$

$$٥٩ س - ٥٠ ع = ١٢٧ \quad \text{و}$$

فاذا حذف  $ع$  منهما يحدث  $٧٣ س = ٢١٩$

ومنها يحدث  $٣ = س$

وبالوضع يحدث على التوالي  $٢ = ص$  و  $٤ = ع$  و  $١ = ر$  و  $٥ = هـ$

(٤٢) قد يكون عدد المعادلات في حل جملة معادلات ذات درجة اولى  
وجملة مجاهيل قدر عدد المجاهيل كما تقدم في جميع جل المعادلات التي حلت  
وقد يكون عدد المعادلات ازيد من عدد المجاهيل

وقد يكون عدد المجاهيل ازيد من عدد المعادلات فهذه ثلاث حالات

الحالة الاولى اذا كان عدد المعادلات ذات الدرجة الاولى قدر عدد المجاهيل  
الداخلة فيها بان كان الاول  $م$  والثاني  $م$  كانت ممكنة الحل على  
العموم ومنتهية اعني انها تتحقق بجملة واحدة من مقادير المجاهيل  
المنحصرة فيها

لانه اذا سلكت الطريقة المبينة في (٣٩) لحل جملة معادلات توصل الى  
معادلة ذات مجهول واحد هكذا

$٧ س = د$  ومنها يستخرج  $س = \frac{د}{٧}$  فاذا وضع هذا المقدار في احدى  
المعادلتين ذاتي المجهولين حدث مقدار للمجهول الثاني المنحصر في هذه

المعادلة ومثل ذلك يجري في جميع مجاهيل الجمل الحادثة من الاوضاع المتوالية

وقد يتوصل بعد عملية الحذف على التوالي الى معادلة انتهائية  $\text{هـ ك ذ ا}$   $\text{س هـ} \times \text{س} = \text{و} \text{ أو } \text{س} = \text{و}$  وهي معادلة فاسدة تدل على أن الجملة المفروضة غير ممكنة الحل أعني أنه لا يمكن تحقيقها بجملة المقادير المجاهيل المنحصرة فيها وذلك انما يقع عندما تكون هذه الجملة محتوية على معادلات متخالفة .

وقد يتوصل بعد الحذف على التوالي الى معادلة انتهائية  $\text{هـ ك ذ ا}$   $\text{س هـ} \times \text{و} = \text{و} \text{ أو } \text{و} = \text{و}$  فتكون جملة المعادلات غير معينة الحل أعني أنه يمكن تحقيقها بجمل لانهاية العدد من المقادير للمجاهيل المنحصرة فيها وانما يقع ذلك اذا كان بين بعض معادلات من الجملة تداخل به يكون عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل

الحالة الثانية اذا كان عدد المعادلات أكثر من عدد المجاهيل المنحصرة فيها بان كان عدد الاولى  $\text{م} + \text{ن}$  وعدد الثانية  $\text{م}$  فالجملة تكون على العموم غير ممكنة الحل لانه اذا أخذ منها معادلات عددها  $\text{م}$  وهـ كان لا يوجد الا جملة واحدة من مقادير المجاهيل المنحصرة فيها التي عددها  $\text{م}$  ووضعت هذه المقادير في المعادلات الباقية التي عددها  $\text{ن}$  ولم تتطابق تكون الجملة المفروضة غير ممكنة التحقق

وقد يوجد تداخل بين بعض معادلات الجملة المفروضة مع  $\text{ك كون}$  عدد المعادلات المتحققة وهو  $\text{م}$  عين عدد المجاهيل الداخلة فيها فحينئذ تكون الجملة المذكورة ممكنة الحل ومعينة فان كان عدد المعادلات المتحققة اقل من  $\text{م}$  أي من عدد المعادلات المفروضة فالجملة المذكورة تكون غير معينة الحل الحالة الثالثة اذا كانت المعادلات اقل من المجاهيل الداخلة فيها بان كان عدد الاولى  $\text{م}$  وعدد الثانية  $\text{م} + \text{ن}$  كانت الجملة على العموم غير معينة الحل لانه يتوصل بعد الحذف المتوالي الى معادلة مشتملة على



مجاهيل عددها  $5 + 1$  وهذه المعادلة تتحقق بجمل لانهاية العدد من المقادير فاذا وضع أحده هذه الجمل في احدى المعادلتين المشتقتين على مجاهيل عددها  $5 + 2$  يحدث مقدار مطابق للجهول الباقي في هذه المعادلة فاذن يكون لهذا الجهول مقادير غير معينة ايضا ومثل ذلك يشاهد في جميع المجاهيل الاخرى اى انه يكون لها مقادير عددها لانهاى ومع ذلك فالجمله تكون غير ممكنة الحل اذا وجد في المعادلات التى عددها م وعدد مجاهيلها م  $5 + 2$  معادلتان أو ثلاث متخالفة

امثله ذلك

المثال الاول أن تفرض ثلاث معادلات هكذا

$$3س - 2ص + 0ع = 14 \quad \text{و}$$

$$2س + ص - 8ع = 10 \quad \text{و}$$

$$6س - 4ص + 10ع = 27$$

ثم يحذف الجاهول ص من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة فيوجد  $7س - 11ع = 34$  و  $1 = 0$  فالمعادلة الفاسدة التى هى  $1 = 0$  تبين ان المعادلة الاولى والثالثة الحادثة منهما هذه المعادلة متخالفتان ويفهم ذلك من أول وهلة لان الطرف الاول من المعادلة الثالثة ضعف الطرف الاول من المعادلة الاولى الذى هو  $3س - 2ص + 0ع$  والطرف الثانى منها ليس ضعف الطرف الثانى من الاولى الذى هو  $14$  وهذا ناشئ من فساد المعادلات الاصلية

المثال الثانى ان تفرض ثلاث معادلات هكذا

$$3س - 2ص + 0ع = 14 \quad \text{و}$$

$$2س + ص - 8ع = 10 \quad \text{و}$$

$$6س - 4ص + 10ع = 28$$

ثم يحذف ص من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة فيحدث

$$٧ ص - ١١ ع = ٣٤ و ٠ = ٠$$

فيظهر من المتطابقة  $٠ = ٠$  أن المعادلة الأولى والثالثة متداخلتان لأن المعادلة الثالثة تحدث من ضرب طرفي المعادلة الأولى في ٢ فالجمله المعلومة لاثني المعادلتين

$$٣ ص - ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و$$

$$٧ ص - ١١ ع = ٣٤$$

فيستخرج من المعادلة الأخيرة  $ص = \frac{٣٤ + ١١ ع}{٧}$  وبوضع هذا المقدار في المعادلة الأولى يحدث

$$ص = \frac{٢٨ + ٤ ع}{١٤} \text{ او } ص = \frac{٣٤ + ٢ ع}{٧}$$

وهذان المقداران يطابقان اى مقدار فرض للجهول ع ومقادير ص و ص و ع المتطابقة تحقق المعادلات المعلومة ولذا يكون حل المعادلات غير معين

المثال الثالث اذا فرض

$$٣ ص - ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و$$

$$٦ ص - ٤ ص + ١٠ ع = ٢٨ و$$

$$٩ ص - ٦ ص + ١٥ ع = ٤٢$$

ثم حذف المجهول ع من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة حدث متطابقان وهذا يدل على ان الجملة المعلومة تؤل الى معادلة واحدة هي  $٣ ص - ٢ ص + ٥ ع = ١٤$  لان المعادلة الثانية ناتجة من ضرب المعادلة الاولى في ٢ والثالثة من ضربها في ٣ فاذا استخرج مقدار ص من المعادلة  $٣ ص - ٢ ص + ٥ ع = ١٤$  يحدث  $ص = \frac{١٤ + ٢ ص - ٥ ع}{٣}$  واذا فرضت مقادير للجهولين ص و ع حدث مقدار المجهول ص وجميع هذه المقادير تحقق المعادلات الاصلية

المثال الرابع اذا فرض

$$٣م - ٢ص + ٥ع = ١٤ و$$

$$٢م + ص - ٨ع = ١٠ و$$

$$٨م - ٣ص + ٢ع = ٢٥$$

ثم حذف ص من الاولى والثانية ثم من الثانية والثالثة تحدث هاتان

$$\text{المعادلتان } ٧م - ١١ع = ٣٤ \text{ و } ١٤م - ٢٢ع = ٦٥$$

وهاتان المعادلتان متخالفتان فلو تم اخلتافي بعضهما لحدث معادلة فاسدة

هي  $٠ = ٣$  وفهم من ذلك ان المعادلات الاصلية متخالفة ايضا لان الطرف

الاول من المعادلة الثالثة ضعف الطرف الاول من الاولى مضموما اليه

الطرف الاول من المعادلة الثانية لكن الطرف الثاني من المعادلة الثالثة ليس

مساويا لضعف الطرف الثاني من المعادلة الاولى مضافا الى الطرف الثاني من

المعادلة الثانية

المثال الخامس اذا فرضنا

$$٣م - ٢ص + ٥ع = ١٤ و$$

$$٢م + ص - ٨ع = ١٠ و$$

$$٨م - ٣ص + ٢ع = ٢٨$$

يحدث بحذف ص منها معادلتان

$$٧م - ١١ع = ٣٤ \text{ و } ٧م - ١١ع = ٣٤$$

وحيث أن هاتين المعادلتين متطابقتان يفهم من ذلك انه يجب استعمال

المعادلتين  $٣م - ٢ص + ٥ع = ١٤$  و  $٧م - ١١ع = ٣٤$

$= ٣٤$  المشروحتين سابقا في المثال الثاني

وعدم انتهاء الجملة المعلومة حادث من كون المعادلة الثالثة مركبة من ضم

ضعف طرفي المعادلة الاولى الى طرفي المعادلة الثانية

المثال السادس اذا فرضنا

$$٣م - ٢ص + ٥ع = ١٤ و$$

$$٦م - ٤ص - ٣ع = ١٥ و$$

$$٩م - ٦ص - ٧ع = ٢٠$$

حدث بخذف ع منهما معادلان ۱۳ = ع ۱۳ و ۲۲ = ع ۲۲  
ومنهما يحدث ع = ۱

\*(٥٦)\*

فلذلك أن يفرض  $x$  رمزاً للتركة ومقتضى منطوق المسئلة أن تكون  
التركة مساوية لما يخص الولد زائداً ما يخص البنت زائداً ١٢٠٠٠ غرش  
أى

$$x = 12000 + \frac{x}{4} + \frac{x}{4}$$

ثم تجرى قاعدة الحل المعلومة على هذه المعادلة فيحدث

$$3x = 2 + x = 72000 + x \quad \text{أى}$$

$$3x = 2 + x = 72000 + x \quad \text{أى}$$

$$2x = 72000 \quad \text{أى}$$

$$x = 36000$$

فقد ارتكبه ٣٦٠٠٠ غرش يخص الولد منها النصف وهو ١٨٠٠٠

غرش والبنت الثلث وهو ١٢٠٠٠ غرش والفقراء الباقي وهو ١٢٠٠٠

غرش

\*(المسئلة الثانية)\*

(٤٥) ما هو العدد اللازم ضمه لحدى الكسر  $\frac{2}{3}$  ليكون الناتج مساوياً

لكمية معلومة  $m$

حل ذلك أن يفرض أن  $x$  العدد المطلوب فيكون بالضرورة

$$\frac{2}{3} + x = m \quad \text{ثم تجرى حل هذه المعادلة بالقاعدة المعتادة فيحدث}$$

$$2 + 3x = 3m \quad \text{ثم}$$

$$3x = 3m - 2 \quad \text{ثم}$$

$$x = \frac{3m - 2}{3} \quad \text{ثم}$$

$$x = \frac{3m - 2}{3}$$

\*(مناقشة)\*

مناقشة المسئلة هو البحث عن الاحوال التى يؤل إليها الحل بواسطة

الفروض المختلفة الجارية على المعاليم

فلاختبار

"فلاختبار ما يؤل إليه الناتج  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  تفرض فروض مختلفة فيه على المعاليم  $\frac{2}{3}$  و  $m$  فيقال

اولا اذا فرض  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  و  $m = \frac{2}{3}$  بان جعل  $7 = 4$  و  $4 = 7$  و  $m = \frac{2}{3}$  في مقدار  $m$  يؤل ذلك المقدار الى

$$m = \frac{2}{3} = \frac{4 - \frac{14}{3}}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{4 - \frac{14}{3} \times 7}{\frac{2}{3} - 1} = m$$

لانه اذا ضم العدد 2 الى حدى الكسر  $\frac{4}{3}$  يصير  $\frac{6}{3} = \frac{2}{1}$  وهذا ناتج لا اشكال فيه لموافقته لمنطوق المسألة

وثانيا اذا فرض أن  $\frac{2}{3} = \frac{0}{8}$  و  $m = \frac{1}{4}$  أى  $m = \frac{1}{4}$  و  $7 = 0$  و  $0 = 8$  في مقدار  $m$  يؤل ذلك المقدار الى

$$m = \frac{1}{4} = \frac{0 - 8}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{0 - 8 \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - 1} = m$$

فحينئذ مقدار  $m = \frac{1}{4}$  هو ما يسمى بالحل السالب ووجه كونه سالباً انك اذا تأملت في منطوق المسألة شاهدت انها غير ممكنة الحل لان كسر  $\frac{0}{8}$  أكبر من  $\frac{1}{4}$  واذا ضم عدد واحد الى حدى الكسر المذكور ازداد هذا الكسر فاذن لا يمكن اضافة عدد واحد الى حدى الكسر  $\frac{0}{8}$  ليكون الناتج مساوياً للكسر  $\frac{1}{4}$  الاصغر منه فعلى هذا يكون الحل السالب  $m = \frac{1}{4}$  لا مسألة الجارى مناقشتها دالا على استحالة حل المسألة في الحالة المذكورة فيبغى حينئذ لتصلح منطوق المسألة أن تغير في المعادلة العمومية التى هى  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  م علامة  $m$  فتصير  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  م فحينئذ يكون منطوقها

ما هو العدد الذى يلزم طرحه من حدى الكسر  $\frac{2}{3}$  ليصير الناتج مساوياً م وهو منطوق لا يختلف عن المنطوق الاصلى الا بتغيير كلمة ضم بكلمة طرح فاذن تكون المسألة ممكنة الحل ويكون لها حل عين الحل المتقدم بقطع النظر عن العلامة لانه اذا حلت المعادلة  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  م يحدث

س =  $\frac{7-م}{1-م}$  وإذا فرض في هذا المقدار أن  $م = \frac{1}{2}$  و  $د = ٨$

و  $٢ = ٥$  يحدث س = ٢

وثالثا إذا فرض أن  $\frac{7}{3} = \frac{٥}{٩}$  و  $م = ١$  بأن جعل  $م = ١$

و  $٢ = ٥$  و  $د = ٩$  في مقدار س آلى

س =  $\frac{٥-٩}{١-١} = \frac{٤}{٠}$

ولايضاح هذا الناتج يقال من المعلوم أن الكسر يزداد متى نقص مقامه فإذا صغر المقام الى غير نهاية أو ساوى صفرا كبر الكسر كذلك فإذا كان يكون للمجهول س مقدارا غير منته في الكبر أعنى مقدار لا يحد ابدأ فالمسئلة تكون ايضا غير ممكنة الحل لأنه اذا تأمل في منطوق المسئلة شوهد أن الكسر اذا ضم لحديه عدد بالغاما بلغ يزداد به غير أنه لا يصير ابدأ مساويا للواحد لان فروق حديه واحدة دائما فيئتذ يكون أى مقدار بهذه الصورة  $\frac{7}{3}$  و  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{٥}{9}$  دالا على استحالة حل المسئلة

\*(تنبيه)\*

كل عدد غير محدود يمكن بيانه بالكسر  $\frac{7}{3}$  أو  $\frac{1}{2}$  أو بعلامة  $\infty$

ورابعا إذا فرض  $\frac{7}{3} = \frac{٥}{9}$  و  $م = ١$  بأن جعل  $م = ١$

و  $٢ = ٥$  و  $د = ٩$  في مقدار س ال ذلك المقدار الى

س =  $\frac{٥-٥}{١-١} = \frac{٠}{٠}$  وتوضيح مقدار س =  $\frac{٠}{٠}$  يقال أن مقدار

س يكون مساويا لخارج قسمة صفر على صفر أى مساويا لعدد اذا ضرب

في صفر انتج صفر اوحيث أن جميع الاعداد المحدودة المضروبة في صفر تحدث

صفر يمكن اعطاء س أى مقدار رقى وبهذا تكون المسئلة غير معينة الحل

لأنه اذا تأمل في منطوق المسئلة يشاهد ان تساوى حدى الكسر  $\frac{٥}{9}$  لا يتغير

بضم أى عدد اليهما فيئتذ يكون الناتج مساويا للواحد دائما وينتج من ذلك

أن أى مقدار بهذه الصورة  $\frac{7}{3}$  يدل على أن المسئلة غير معينة الحل

\*(المسئلة الثالثة)\*

$$\frac{7}{3} = \frac{٥}{9}$$

(٤٦) ساعيان ابتدأ السير من نقطتي  $ا$  و  $ب$  على مستقيم  $ا-ب$  من الشمال الى اليمين وكان الساعي المبتدء من  $ب$  متقدما عن الآخر بالمسافة  $ا-ب$  الرموز لها بالحرف  $د$  وسرعته  $د$  وسرعة الآخر  $م$  والمراد تعيين نقطتي وضعيهما حين يكون بينهما مسافة من امتداد  $ا-ب$  مساوية للبعد  $د$  (والمراد بسرعة الساعيين المبينة بالرمزين  $م$  و  $د$  البعدان اللذان يقطعهما الساعيان في وحدة الزمن)

فيرمز بالحرفين  $ا$  و  $ب$  لوضعي الساعيين حين يكون البعد الحادث بينهما مساويا للكمية  $د$  ثم يرمز بالحرف  $س$  للبعد المجهول الذي هو  $ا-ب$  فالبعد  $س$  المساوي  $ا-ب$  يكون مبينا بالمقدار  $س = د + د$

وحيث ان الزمن الذي استغرقه الساعي المبتدء من  $ا$  في قطع البعد  $س$  عين الزمن الذي استغرقه الآخر المبتدء من  $ب$  في قطع البعد  $س = د + د$  يبحث عن كل من هذين الزمنين فيقال حيث ان الساعي الاول قطع البعد  $م$  في وحدة الزمن يقطع وحدة البعد في الزمن  $\frac{1}{م}$  ويقطع البعد  $س$  في الزمن  $\frac{س}{م}$  ومثل ذلك الساعي الثاني فانه يقطع البعد  $س = د + د$  في

في زمن مبين بالمقدار  $\frac{س + د + د}{د}$  فاذن تحدث هذه المعادلة

$$\frac{س}{م} = \frac{س + د + د}{د} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$د = م = م - م = د + م = د + م \quad \text{أو}$$

$$م = م - د = م - م = م - م = م - م \quad \text{أو}$$

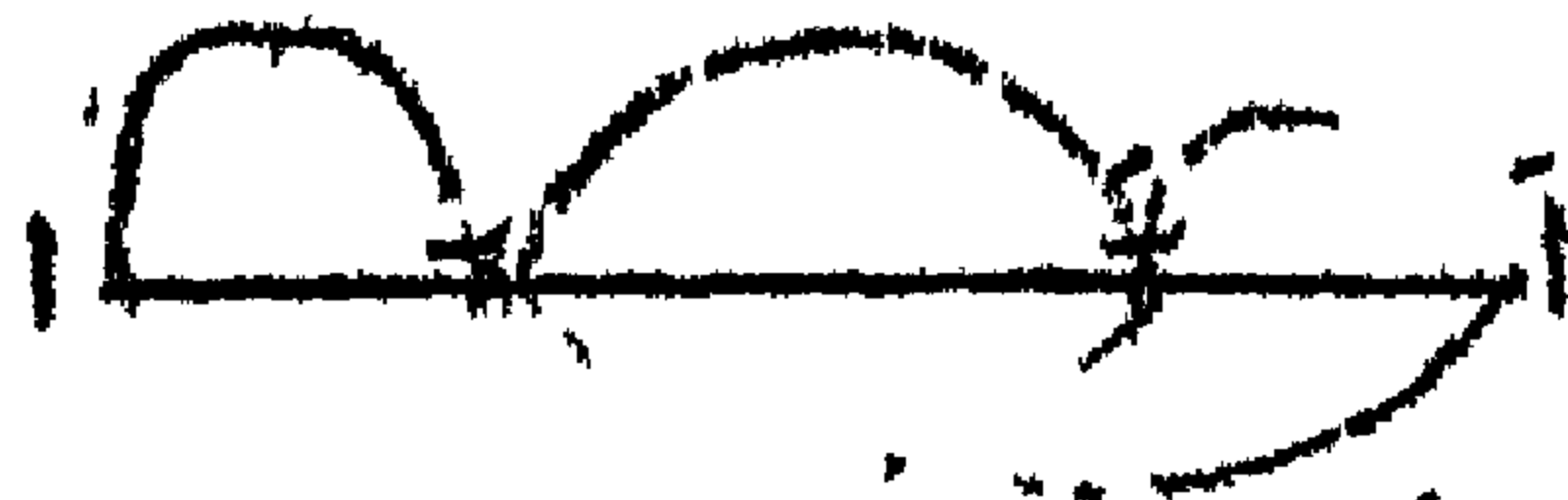
$$م = (م - د) = م - د = م - د \quad \text{ومنها ينتج}$$

$$\frac{م(د - د)}{د - م} = \frac{م(د - د)}{د - م}$$





قصير المعادلة هكذا



$$\frac{m}{m} = \frac{m}{m} \text{ ومنها يستخرج}$$

$$m = \frac{m}{m} (x + y) \text{ وبناء على ذلك يكون}$$

$$m = \frac{m}{m} (x + y)$$

فإذا فرض في هذين المقدارين أن  $x = 0$  و  $m < 0$  وهو عين  
الفرض الذي حدث منه المقداران السالبان المتقدمان

$$\text{آلاى } m = \frac{m}{m} \text{ و } m = \frac{m}{m}$$

وهما مقداران موجبان متحدان في المقدار المجرد مع المقدارين السالبين  
المستخرجين مما تقدم فحينئذ يكون المقدار السالب ناتجا بعض الاحيان من  
فرض فاسد اجرى في وضع المسئلة على صورة معادلة

الحالة الثانية اذا فرض أن  $x = 0$  و  $m < 0$  آل المقداران  
العموميان الى

$$m = \frac{m}{m} \text{ و } m = \frac{m}{m}$$

ومن حيث أن  $m < 0$  يكون هذان المقداران موجبين لان بسطيهما  
موجبان ومقاميهما كذلك

فاذا توصل في منطق المسئلة شوهد أنها ممكنة الحل لانه بفرض  $x$  صفرا  
يظهر أن المطلوب تعيين النقطة التي يلحق فيها الساعى ١ الساعى ٢ وان  
ملووقه به يكون محققا حيث فرضت سرعته أكبر من سرعة الساعى ٢  
فحينئذ يكون المقداران الموجبان المتقدمان دالين على امكانية المسئلة

الحالة الثالثة اذا فرض أن  $x = 0$  و  $m > 0$  آل المقداران  
العموميان الى

$$س = \frac{د}{م} \text{ و } ص = \frac{د}{ن}$$

وهما مقداران سالبان لان البسطين موجبان والمقامين سالبان (حيث كان  $م > ن$ ) وليسا ناتجين من فساد الغرض في وضع المسئلة على صورة معادلة لان الحالة الخصوصية التي نحن بصدددها لا تحتوى على فرض مشكوك فيه حيث كان المطلوب تعيين النقطة التي يلحق فيها الساعى - الساعى ا وانما يكون الحلان السالبان ناتجين من اختلال أحد شروط منطوق المسئلة لان سرعة الساعى ا مفروضة اقل من سرعة الساعى - .  
 - بدليل أن  $م > ن$  فاذن لا يمكن أن يلحق الساعى ا الساعى -  
 ولتصلح منطوق المسئلة يفرض في المعادلة  $\frac{س}{م} = \frac{س-د}{ن}$  أن  $د = ٠$   
 ثم تغير علامة س وبه تؤول الى  $\frac{س}{م} = \frac{س-د}{ن}$  وبغير علامة الطرفين يحدث  $\frac{س}{م} = \frac{س+د}{ن}$  وتحويل هذه المعادلة الى منطوق مسئلة يلاحظ أن س هو الزمن الذي استغرقه الساعى ا ليقطع البعد س وأن  $\frac{س+د}{ن}$  هو الزمن الذي استغرقه الساعى - ليقطع البعد س + د وحيث أن المسافة التي قطعها الساعى ا ليصل لنقطة التلاقى مع الساعى - اصغر من المسافة الذي قطعها الساعى - تكون نقطة التقابل على شمال النقطة ا فعادلة  $\frac{س}{م} = \frac{س+د}{ن}$  تتحول الى منطوق لائق هو

$$\frac{س}{م} = \frac{س+د}{ن}$$

ساعيان ابدا في السير على خط ا - من نقطتين ا و - وسيبرهما من اليمين الى الشمال لكن الساعى ا سابق للساعى - بالبعد د وسرعة الاول م والاخر ن والمطلوب تعيين النقطة - من امتداد ا - التي يلحق فيها الساعى - الساعى ا

فاذا حلت المعادلة  $\frac{س}{م} = \frac{س+د}{ن}$  على اسلوب ما تقدم يوجد للبعدين

ا - و - أى س و س + د أو ص المقداران

$$س = د \cdot م \quad و \quad م = د \cdot س$$

الموجبان والمحددان في المقدار الجرد مع المقدارين السالبين المستخرجين مما تقدم

الحالة الرابعة اذا فرض أن  $د = م$  و  $م = د$  فالمقداران العموميان يؤلان الى

$$س = د \cdot م \quad و \quad م = د \cdot س$$

وهما مقداران غير محدودين فالمسئلة تكون حينئذ غير ممكنة الحل لان سرعة الساعين واحدة فالبعد الفارق بينهما لا يصير مساويا لصفرا أبدا

الحالة الخامسة اذا فرض أن  $د = م$  و  $م = د$  فالمقداران العموميان يؤلان الى

$$س = د \cdot م \quad و \quad م = د \cdot س$$

وحيث أن هذين المقدارين غير معينين يمكن اعطاء المجهولين جميع المقادير الممكنة وهو يوافق منطوق المسئلة لان الساعين خرجا من نقطة واحدة بدليل أن  $د = م$  ولا يفترقان بدليل أن  $م = د$  فاذن يكون  $د = م$  في جميع نقط الخط ا ب

\* (انواع ناتجة من مناقشة المسائل التي بدرجة اولى) \*

(٤٧) قد نتج من مناقشة المسئلتين المتقدمتين أربعة أنواع من المقادير النوع الاول المقادير الموجبة والثاني المقادير السالبة والثالث المقادير التي بهذه الصورة  $\frac{د}{م}$  والرابع المقادير التي بهذه الصورة  $\frac{م}{د}$

فأما المقادير الموجبة فانها تدل على امكان حل المسئلة الا في مسائل احتيج فيها الى أن يكون مقدار المجهول عددا صحيحا ووجد مقدار كسرا موجبا فانها غير ممكنة الحل وذلك كالمسئلة التي يراد فيها تعيين اساس جولة تعداديه واما المقادير السالبة فانها تحدث من الفروض التاسعة الكائنة في وضع

المسئلة على صورة معادلة أو من الخلل في معنى احد شروط منطوق المسئلة

ومتى نتج للمجهول مقدار سالب وجب اولا اختبار وضع المسئلة على صورة معادلة هل فيه فرض يشك في معناه فان كان فيه ذلك غير معنى هذا الفرض ثم يحل المسئلة الجديدة الناتجة منه فان لم يكن فيه فرض يشك فيه او كان واصح لكن وجد مقدار سالب أو جهة مقادير المجاهيل تحقق بالضرورة عدم امكانية بعض شروط منطوق المسئلة فاذا تصليح هذا المنطوق في المعادلة أو المعادلات التي حلت تغير علامات المجهول او المجاهيل التي وجدت لها مقادير سالبة ثم تحول المعادلات الجديدة الى عبارة قريبة المنطوق ما امكن من المنطوق الاصل فينتج من ذلك مسئلة جديدة ممكنة الحل غير مخالفة للاولى الا في معنى بعض شروط المنطوق ومقادير مجاهيلها موجبة ومقاديرها المجردة عين المقادير التي استخرجت من المسئلة الاولى

وأما المقادير التي بهذه الصورة ج فانها تدل على أن المسئلة غير ممكنة الحل وتحدث المقادير المذكورة من عدم موافقة بعض شروط المنطوق أو من اشتراط شرط لا يمكن تحقيقه أو من أن المنطوق يشتمل على شروط أكثر من المجاهيل

وأما المقادير التي بهذه الصورة ب فانها تدل على أن المسئلة غير معينة الحل والمقادير المذكورة تحدث من كون منطوق المسئلة مشتملا على شرط متحقق دائما أو محتويا على شروط أقل من المجاهيل

\*(تنبية)\*

الملاحظات المتقدمة تتحقق في جميع المسائل الصالحة للمناقشة

\*(مناقشة عامة للمعادلات ذوات الدرجة الاولى)\*

(٤٨) ولنبدء بوضع المعادلات ذوات الدرجة الاولى وجهة مجاهيل وحلها فنقول كل معادلة ذات درجة اولى ومجهول واحد يمكن تحويلها الى

هذه الصورة  $ax + b = c$  التي يستخرج منها  $x = \frac{c-b}{a}$

وكل

وكل معادلتين ذاتي درجة أولى وبمجهولين يمكن تحويلهما الى هذه الصورة

$$2 + 2 = 4$$

$$18 = 2 + 16$$

فالحروف ح و ه و ح و ح و ه و ه و موزاكيان صحيحة  
معلومة ذات علامات ما فاذلحت هاتان المعادلتان بمقتضى ما تقرر  
بحدوث

$$\frac{75-57}{75-57} = 1, \frac{75-57}{75-57} = 1$$

وكل ثلاث معادلات ذوات درجة اولى وثلاثة مجاهيل يمكن تحويلها الى  
هذه الصورة

$$7 = 3 + 2 + 2$$

$$\text{حَم} = \text{حَص} + \text{هَع} = \text{وَ}$$

$$\text{و} = \text{هـ} + \text{ز} + \text{ح}$$

فالحروف ح و ه و و و ح و ت و ه و و و ح و ت و ه و و  
تدل على كليات صحيحة معاومة ذات علامات ما ويحدث من هذه المعادلات  
الثلاث بطريقة حذف المجهولين ع و صه بالكيفية السابقة

$$\frac{w_{11}^0 - w_{12}^0 + w_{21}^0 - w_{22}^0 + w_{31}^0 - w_{32}^0}{w_{11}^1 - w_{12}^1 + w_{21}^1 - w_{22}^1 + w_{31}^1 - w_{32}^1} = \frac{3}{2}$$

فإذا وضع هذا المقدار في إحدى المعادلتين ذواتي المجهولين الحادتين من  
أجراء العمل توصل إلى مقدار  $v$  وإذا وضع مقدارا  $s$  و  $v$   
في إحدى المعادلات الثلاث المألومة توصل إلى مقدار  $c$  لكن يمكن  
استخراج مقدار  $c$  و  $v$  بطريقة مختصرة وذلك بالتنبيه على أن  
المعادلات الثلاث لا تتغير إذا غيرت فيها الرموز



العلامة فيكون بسط مقدار  $هـ هـ هـ$  هكذا  $هـ هـ هـ$  وبسط مقدار  $هـ هـ هـ$  هكذا  $هـ هـ هـ$

وثانيا لاستخراج المقام المشترك لمقادير  $هـ هـ هـ$  مع المستخرجة من المعادلات الثلاث المحتوية على ثلاثة مجاهيل يؤخذ المكرران  $هـ هـ$  ويركب منهما الحدان  $هـ هـ$  ثم يفصلان عن بعضهما بالعلامة  $هـ هـ$  فيصيران  $هـ هـ$  ثم يدخل المكرر الثالث  $هـ$  في آخر ووسط واول كل من الحدين المذكورين على التوالي فيحدث بادخاله في الاول  $هـ هـ هـ هـ هـ$  وفي الثاني  $هـ هـ هـ هـ هـ$  ثم يجعل لكل من الحدين الاولين ذوى الثلاثة حروف علامة الحد ذى الحرفين المكون له ثم تغير علامة الحدود التالية على التبادل فيحدث

$هـ هـ هـ هـ هـ + هـ هـ هـ هـ هـ - هـ هـ هـ هـ هـ$   
ثم توضع هذه العلامة - على ثاني حرف من كل حد وهذه  $هـ$  على ثالث حرف ايضا فيحدث المقام المشترك وهو

$هـ هـ هـ هـ هـ + هـ هـ هـ هـ هـ - هـ هـ هـ هـ هـ$

ولاستنتاج بسط أحد مقادير المجاهيل الثلاثة يغير مكررا المجهول بالحرف المعلوم في المقام المشترك

فاذا اريد استخراج بسط مقدار المجهول  $هـ$  مثلا يغير في المقام المشترك مكرره  $هـ$  بالحرف المعلوم و فيحدث

$هـ هـ هـ هـ هـ + هـ هـ هـ هـ هـ - هـ هـ هـ هـ هـ$

واذا اريد استخراج مقادير المجاهيل من اربع معادلات ذوات اربعة مجاهيل أو خمس معادلات ذوات خمسة مجاهيل وهكذا تجري عليها اعمال كالأعمال المتقدمة

(٥٠) يمكن استعمال القوانين العمومية المتقدمة في حل معادلات



مخصوصة وذلك بان تغير فيها الحروف بمقاديرها من المعادلات المعلومة ثم نجسم عملها لكن حل المعادلات الرقمية من اول الامر انحصر

(٥١) البحث في هذه المقادير ثبت لنسائه يمكن أن يحدث من حل المعادلات ذوات الدرجة الاولى أربعة أنواع من المقادير

الاولى المقادير الموجبة والثاني المقادير السالبة والثالث المقادير

التي بهذه الصورة  $\frac{1}{2}$  أو اللانهاية والرابع المقادير التي بهذه الصورة  $\frac{1}{3}$

أو غير المعينة وقد علم مما مر أنه اذا كان عدد المعادلات  $m$  عين عدد

المجاهيل المحتوية عليها كانت جملة المعادلات ممكنة الحل ومنتهية الا اذا كانت

محتوية على معادلة فاسدة أو على معادلات غير متوافقة فالحل غير ممكن

ومتى كانت الجملة محتوية على معادلات متطابقة أو على بعض معادلات

متداخلة في بعضها فالحل غير معين اذا تقرر ذلك نطبقه على معادلة عمومية

ذات مجهول واحد وعلى معادلتين عموميتين ذاتي مجهولين فتقول -

اولا اذا فرض معادلة  $ax = b$  واستخرج منها مقدار  $x = \frac{b}{a}$

وفرض فيه أيضا  $ay = c$  يحدث  $y = \frac{c}{a}$  أعني أن مقدار  $y$

على مقتضى ما تقدم يكون غير محدود في الكبر فالمعادلة لا تتحقق باي مقدار

محدود لانها تصير  $0 = x$  وهي معادلة فاسدة لان الصفر

المضروب في عدد محدود لا يساوي أبدا مقدار  $y$

وثانيا اذا فرضت معادلتان ذاتا مجهولين

$ax + by = c$  و  $ax + by = d$  واستخرج منهما

المقداران

$$x = \frac{d - by}{a - b} \quad \text{و} \quad y = \frac{ax - c}{a - b}$$

وجعل في هذين المقدارين العموميين  $ax + by = c$  و  $ax + by = d$

أي  $ax + by = c$  و  $ax + by = d$  أي  $ax + by = c$  و  $ax + by = d$

يقول مقدار  $هـ = هـ - ز = هـ$  الى  $ل$  بالرمز للبسط بالحرف  $ل$   
 ويكون غير محدود في الكبر والمعادلتان المعلومتان لا تتحققان بأى مقدار  
 محدود فرض المجهول  $هـ$  وتكونان في الحقيقة متخالفتين لانه يستخرج  
 من الفرضين المتقدمين اللذين هما  $ز = ز$  و  $هـ = هـ$   
 بالتقسيم على الحروف المعلة  $\frac{ز}{هـ} = \frac{ز}{هـ}$  و  $\frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ}$  واذا رمز للنسبتين  
 المتساويتين اللتين هما  $\frac{ز}{هـ}$  بالحرف  $ك$  وللنسبة  $\frac{هـ}{هـ}$  بالحرف  $ر$   
 يحدث

$$\frac{ز}{هـ} = \frac{ز}{هـ} = ك \quad \text{و} \quad \frac{هـ}{هـ} = ر \quad \text{وينتج من ذلك}$$

$$ر = ك \quad \text{و} \quad ز = هـ \quad \text{و} \quad هـ = ر$$

واذا بدلت في المعادلة  $هـ = هـ + ز$  الحروف  $ز$  و  $هـ$  و  $هـ$   
 بمقاديرها يحدث  $ر = ك + ز$  و  $هـ = ر$  وهى معادلة  
 متخالفة مع الثانية لانها وان كانت عينها الا أن طرفيها قد ضربا في كميتين  
 مختلفتين  $ر$  و  $ك$

وثالثا اذا كان مقدار المجهول  $هـ$  بهذه الصورة  $\frac{ز}{هـ}$  يكون  
 مقدار  $هـ$  بهذه الصورة ايضا لان مقام مقدار  $هـ$  مساويا لـ  $هـ$   
 يبقى الا البرهنة على أن بسطه ليس مساويا لـ  $هـ$  على أن  $هـ = هـ + ز$   
 فيقال حيث تقدم أن  $\frac{ز}{هـ} = \frac{ز}{هـ} = ك$  و  $\frac{هـ}{هـ} = ر$  يحدث  $\frac{ز}{هـ} = \frac{ز}{هـ} = ك$

أو  $ر = ك$  و  $هـ = ز$  فاذن يكون مقدار  $هـ$  بهذه الصورة  $\frac{ز}{هـ}$   
 ورابعا اذا فرض معادلة  $هـ = هـ$  واستخرج منها  $هـ = \frac{ز}{هـ}$   
 وجعل في هذا المقدار العمومى  $هـ = هـ$  و  $هـ = هـ$  يحدث  
 $هـ = هـ$  فعلى مقتضى ما تقدم يكون مقدار  $هـ$  غير معين أعنى أن

جميع المقادير المحدودة تحقق المعادلة المعلومة لانها تصير  $\cdot \times \text{صه} = \cdot \cdot$   
وهي معادلة متطابقة لان الصفر اذا ضرب في عدد ما محدود يحدث حاصل  
مساويا للصفر  
واذا فرض معادلتان ذاتا مجهولين

$$\text{حس} + \text{دصه} = \text{هه} \quad \text{و} \quad \text{حس} + \text{دصه} = \text{هه} \quad \text{واستخرج منهما}$$

المقداران

$$\text{صه} = \frac{\text{هه} - \text{دصه}}{\text{ح} - \text{د}} \quad \text{و} \quad \text{صه} = \frac{\text{هه} - \text{دصه}}{\text{ح} - \text{د}}$$

وجعل في هذين المقدارين العموميين  $\text{هه} - \text{دصه} = \cdot$  و  $\text{ح} - \text{د}$   
 $\text{د} = \cdot$  أى  $\text{هه} = \text{دصه}$  و  $\text{ح} = \text{د}$  يحدث  $\text{صه} = \cdot$   
وهو مقدار غير معين وحيث شوهد فيما تقدم أن غير المعين لا يقع الا اذا كان  
عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل يلزم البرهنة على أن هاتين المعادلتين  
المعلومتين ليستا الا واحدة لانه اذا استخرج من الفرضين المتقدمين  $\text{هه} - \text{د}$

$$= \text{دصه} \quad \text{و} \quad \text{ح} = \text{د} \quad \text{بالتقسيم على الحروف المعللة النسب}$$

$$\frac{\text{هه}}{\text{هه}} = \frac{\text{دصه}}{\text{د}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{ح}}{\text{ح}} = \frac{\text{د}}{\text{د}} \quad \text{ورمز لها بالحرف ك يحدث}$$

$$\frac{\text{هه}}{\text{د}} = \frac{\text{ح}}{\text{د}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{ح}}{\text{د}} = \frac{\text{ك}}{\text{ك}} \quad \text{أو} \quad \text{هه} = \text{دصه} \quad \text{و} \quad \text{ح} = \text{د} \quad \text{و} \quad \text{د} = \text{د}$$

واذا وضع في المعادلة  $\text{حس} + \text{دصه} = \text{هه}$  بدل الرموز  $\text{ح}$  و  $\text{د}$  و  $\text{هه}$

مقاديرها المتقدمة تؤل الى  $\text{ح} \text{ك} \text{صه} + \text{د} \text{ك} \text{صه} = \text{هه} \text{ك}$  وهي  
معادلة لا تخالف المعادلة الثانية الا بضرب طرفيها في  $\text{ك}$  فحينئذ المعادلتان  
المفروضتان ليستا الا واحدة

واذا كان مقدار  $\text{صه}$  بهذه الصورة  $\text{ب} -$  يكون مقدار  $\text{صه}$  كذلك لان

ممتصم صـ مساو لصفر فلم يبق الا البرهنة على أن بسطه مساو لصفر ايضا  
 أى على أن  $ح هـ = هـ ح$  فيقال حيث تقدم أن

$$\frac{هـ}{ح} = \frac{ح}{هـ} \text{ يحدث } \frac{هـ}{ح} = \frac{ح}{هـ} \text{ أو } ح هـ = هـ ح \text{ فاذن}$$

يكون مقدار صـ بهذه الصورة ÷

(تنبيهات)\*

الاول قد نتج من جعل  $هـ ح = ح هـ$  و  $ح ح = ح ح$  ان مقدارى  
 صـ و هـ يكونان بهذه الصورة ÷ فاذا ضم لهذين الفرضين فرض  
 $هـ = ح$  و  $ح = هـ$  حدث ناتج عين الاول فمقدارا صـ و هـ  
 يتنوع ان يكونا معينين غير ان بينهما نسبة ثابتة لانه اذا جعل في المعادلتين  
 المعلومتين  $هـ = ح$  و  $ح = هـ$  الا الى  $ح ص + ص هـ = ح هـ$   
 و  $ح ص + ص هـ = ح هـ$  ومنها يحدث

$$\frac{ص}{ح} = \frac{ح}{هـ} \text{ و } \frac{ص}{ح} = \frac{ح}{هـ}$$

وحيث نتج من فرض  $ح ح = ح ح$  أن  $\frac{ح}{ح} = \frac{ح}{ح}$  يؤل مقدارا  
 صـ الى صـ  $= \frac{ح}{هـ}$  ومنه يحدث  $\frac{ص}{ح} = \frac{ح}{هـ}$  أعنى  
 أن النسبة بين مقدارى صـ و هـ مساوية  $\frac{ح}{هـ}$  وهى نسبة  
 ثابتة

الثانى قد ظهر من المناقشة المتقدمة أن مقدارى المجهولين لجملة محتوية على  
 معادلتين ذاتى مجهولين كالمقدمتين يكونان فى آن واحد لانهما بين أو غير  
 معينين لكن هذا لا يتيسر فى جملة معادلتين متشعبتين ذاتى مجهولين

الثالث قد شوهد أن المقدار الذى بهذه الصورة ÷ يدل على ان المقدار غير  
 معين وقد يدل مع ذلك على وجوده ضروب مشتركة بين حدى الكسر مساو  
 لصفر حين يفرض فرض مخصوص لهذين الحدين فاذا فرض مثلا

س =  $\frac{z^3 - z^2}{z - z}$  وجعل فيه  $z = z$  الى س =  $\frac{z^3 - z^2}{z - z}$  لكن

حيث أى حدى الكسر  $\frac{z^3 - z^2}{z - z}$  يقبلان القسمة على  $z - z$  وأن

أحدهما يساوى  $(z - z)(z^2 + z + z)$  والآخر يساوى  $(z + z)(z - z)$

حدث س =  $\frac{(z^2 + z + z)(z - z)}{(z + z)(z - z)}$  أو س =  $\frac{z^2 + z + z}{z + z}$

بحذف المضروب المشترك

فإذا فرض الآن أن  $z = z$  ال مقدار س الى  $\frac{z^3}{z^2} = \frac{z^3}{z^2}$  فاذن يكون مقدار س معيناً

وإذا فرض أيضاً فى مقدار س =  $\frac{z^2 + z + z}{z - z}$  أن  $z = z$  الى

الى س =  $\frac{z^2 + z + z}{z - z}$  لكن حيث أن مقدار س يمكن وضعه بهذه الصورة

س =  $\frac{(z - z)}{(z - z)z}$  وأن حدها قابلان للقسمة على  $z - z$  يصير  
س =  $\frac{z - z}{z}$  بحذف المضروب المشترك

فإذا فرض الآن فى هذا المقدار أن  $z = z$  الى س =  $\frac{z - z}{z} = 0$

وإذا فرض أيضاً فى مقدار س =  $\frac{z^2 + z + z}{z - z}$  أن  $z = z$  الى س =  $\frac{z^2 + z + z}{z - z}$

ومن المعلوم أنه يوجد مضروب مشترك بين حدى الكسر  $\frac{z^2 + z + z}{z - z}$  فلنعينه

بضرب حدها فى  $z - z$  فيحدث س =  $\frac{z^2 + z + z}{z - z}$  ثم بقسمة حدى

هذا المقدار على المضروب المشترك  $z - z$  يؤل الى س =  $\frac{1}{z - z}$  ثم

يفرض  $z = z$  يؤل هذا المقدار الى  $\frac{1}{z - z}$

فحينئذ مقدار س المساوى  $\frac{1}{z - z}$  يدل فى بعض الأحيان على وجود

مضروب مشترك بين حدى الكسر المبين به مقدار المجهول ففى تحقق وجوده

لزم أولاً حذفه ثم اجراء القروض التى بها يؤول حدى الكسر الى صفر فحينئذ

يُصِيرُ مَقْدَارَ الْمَجْهُولِ بِهَذِهِ الصُّورَةِ  $\frac{2}{3}$  أَوْ  $\frac{1}{3}$  أَوْ  $\frac{1}{4}$  أَعْنَى أَنَّهُ مَتَى  
أَوْعَدَى أَوَّلَ نَهَائِي

**\* (الباب الثالث) \***

\* (في المربع والجذر التربيعي والمعادلات والمسائل التي بدرجة ثانية) \*

\* (في المربع والجذر التربيعي) \*

(٥٢) قد تقدم أن مربع الكمية هو حاصل ضرب مضروبين كل منهما مساوئها وان الجذر التربيعي لكمية مقدار اذا رفع الى الدرجة الثانية تحصلت تلك الكمية فحينئذ يكون  $\sqrt{\text{مربع د}}$  و  $\sqrt{\text{الجذر التربيعي د}^2}$  الجذر  $\sqrt{\text{د}}$  ومربع  $\sqrt{\text{د}^4}$  هو د

(٥٣) فربع الحد  $\sqrt{570}$  يكون مساويا  $\sqrt{570} \times \sqrt{570} = 570$   $\sqrt{570}$   
 (قاعدة) لتربيع حد ربع مكرره وتضاعف اسس كل من حروفه  
 (قاعدة اخرى عكس المتقدمة) استخراج جذر مربع حد يكون باستخراج  
 الجذر التربيعي لمكرره ثم تنصيف اسس كل من حروفه فحينئذ

$$\begin{array}{r} 11 \\ 57 \times = 5729 \end{array}$$

\* (ب) \*

الحديث يكون مربعا كاملا متى كان مكثره مربعا كاملا وكانت اسس جميع  
حروف زوجية فان لم يكن كذلك فليس بكامل وحينئذ فيوضع عليه هذه  
العلامة ٧ والكمية الناتجة من ذلك تسمى حدا غير جذري أو جذرا  
أصم أو جذرا بدرجة ثانية وذلك نحو  $\sqrt{25}$  فاذا كانت الكمية  
محتوية على جذر منطق أو كانت محتوية على جذر يمكن استخراجها سميت  
كمية جذرية

(٥٤) اختصار الجذرا الاصم الذي بدرجة ثانية مؤسس على قاعدة هي أن الجذر التربيعي لمخاصل ضرب يكون مساويا لمخاصل ضرب الجذور التربيعية

لكل من مضاربه في بعضها فحينئذ

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \times \sqrt{2} &= \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4} = 2 \text{ لان } (\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) = 2 \times 2 = 4 \\ &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

فان يكون مربع  $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$  مساويا  $2 \times 2$  وينتج من ذلك أن  $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$  يكون مساويا للجذر التربيعي للعدد  $2 \times 2$

(٥٥) لاختصار الجذر الاصم  $\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2}$  يحل  $2 \times 2$  الى مضروبين أحدهما يكون مربعا كاملا فيجذ

$$\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{2 \times 2} = 2 \times 2 = 4$$

(قاعدة) لاختصار جذر أصم بدرجة ثانية يستخرج الجذر التربيعي لجميع المضارب المربعة الموجودة تحت علامة الجذر ثم يكتب حاصل ضرب هذه الجذور على يمين علامة الجذر التي تترك تحت المضارب التي لم تكن

مربعات كاملة ومكرر الجذر في مقدار  $2 \times 2$  هو الكمية  $2 \times 2$  (قاعدة) لادخال مكرر الجذر التربيعي تحت العلامة يرفع هذا المكرر الى الدرجة الثانية ثم يضرب بعد رفعه في الكمية التي تحت علامة الجذر فحينئذ

$$\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{2 \times 2} = 2 \times 2 = 4$$

ويمكن اثبات هذه القاعدة من اول الامر بملاحظة أن  $2 \times 2 = 4$  وتذكر ما سبق في القاعدة المثبتة في البند السابق فعلى مقتضى ذلك

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \text{ فاذن يكون}$$

$$\sqrt[2]{\begin{matrix} ٢٥ \\ ٥٦ ٢٢ \end{matrix}} = \sqrt[2]{\begin{matrix} ٢٤ \\ ٥٦ ١١ \end{matrix}} = \sqrt[2]{\begin{matrix} ٢٤ \\ ٥٦ ١٦ \end{matrix}} = \sqrt[2]{\begin{matrix} ٢٤ \\ ٥٦ ٤ \end{matrix}}$$

(٥٦) ما تقدم في (بند ٥٣) من قواعد التربيع واخذ الجذر التربيعي لحد لم تتعرض فيه للعلامة وتعرض لها فنقول

اولا ان مربع أى حد يكون موجبا دائما لانه متحصل من ضرب حدين متعدين في العلامة

وثانيا ان الجذر التربيعي لحد موجب تحت  $\sqrt{\quad}$  يكون  $+$  أو  $-$  لان  $\sqrt{\quad}$  كلامهم ما اذا رفع الى الدرجة الثانية حدث منه  $\sqrt{\quad}$  فيكون الجذر التربيعي لحد متبوعا بالعلامة  $+$  أو  $-$  وتوضع هذه العلامة المضاعفة  $\pm$  امامه ملفوظا بما زائد او ناقص فينبذ يكون

$$\sqrt{\quad} \pm = \sqrt{\quad}$$

وان الجذرين التربيعيين لحد سالب كحد  $\sqrt{-}$  لا وجود لهما لان كل كمية سالبة أو موجبة اذا رفعت الى القوة الثانية حدث منها ناتج موجب فينبذ يكون  $\sqrt{-}$  هو كمية تخيلية أو مقدار تخيلي والكمية الحقيقية سواء كانت موجبة أو سالبة جذرية أو غير جذرية هي ماعدل التخييلة

(٥٧) نتائج يتوصل اليها يبراهين مشابهة للمتقدمة

الاولى لرفع حد الى القوة الثالثة أى التكعيب يكعب مكرره وتثالث اسس

٣٦٩

٢٣

حروفه فتكعيب حد ٥٦٧ هو ١٦٨٠٩٣٧

الثانية لاستخراج الجذر التكعيبي لحد يستخرج الجذر التكعيبي لمكرره ويؤخذ

٤٢

١٢٦

ثالث كل من اسس حروفه فالجذر التكعيبي للحد ٢٧ هو ٣

الثالثة لاختصار الجذر التكعيبي الأصم لحد يستخرج الجذر التكعيبي لمضاربه المكعبة الموجودة تحت علامة الجذر المذكور ويوضع جذرها



مكرر العلامة الجذر فينتد

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٥٧ \end{array}} \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٥٧ \end{array}} = \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٥٧ \end{array}} \times \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢٣ \\ ٨ \end{array}} = \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٤٥ \\ ٤٠ \end{array}}$$

الرابعة لادخال مكرر تحت علامة جذر تكعيبي يرفع هذا المكرر الى القوة الثالثة ويضرب في الكمية الكائنة تحت العلامة المذكورة فينتد

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢٧ \\ ٥٧ \end{array}} \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٥٧ \end{array}} = \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢٣ \\ ٥٧ \end{array}}$$

الخامسة علامة تكعيب تحت تكون دائماً عين علامة الحد وعلامة الجذر التكعيبي تحت تكون ايضاً عين علامة الحد فينتد

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٥٧ \end{array}} = \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢٦ \\ ٥٧ \end{array}} \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٣٩ \\ ١٢٥ \end{array}} = \left( \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٥٧ \end{array}} \right)$$

(٥٨) استخراج الجذر التربيعي لكمية ذات حدود يتوقف على قاعدة تكوين مربع الكمية المذكورة وقد تقدمت قاعدة تكوين مربع كمية

ذات حدين ككمية  $(س + هـ)$  المساوية  $س^٢ + ٢س هـ + هـ^٢$

فاذا اريد تربيع كمية ذات ثلاثة حدود ككمية  $س + هـ + ز$  يرمز للحدين  $س + هـ$  بالحرف س فيحدث

$$(س + هـ + ز)^٢ = (س + هـ)^٢ + ٢س هـ + ٢س ز + ٢هـ ز + هـ^٢ + ز^٢$$

وببدال س بمقداره يحدث

$$(س + هـ + ز)^٢ = (س + هـ)^٢ + ٢س هـ + ٢س ز + ٢هـ ز + هـ^٢ + ز^٢$$

$$س^٢ + ٢س هـ + هـ^٢ + ٢س ز + ٢هـ ز + ز^٢$$

اعني ان مربع كمية ذات ثلاثة حدود يتركب من حاصل جمع مربعات جميع حدودها ومن ضعف حاصل ضرب حدودها شتى

وهذه القاعدة مطردة في كل كمية ذات حدود لانه اذا فرض انها متحققة

في كمية ذات حدود عدد حدودها م كالكمية  $س + هـ + ز + ح + ل$

تكون

تكون متحققة أيضا في كمية ذات حدود عددها يزيد عن عدد حدود  
الاولى بواحد كالكمية  $\text{ح} + \text{د} + \text{ه} + \dots + \text{ل} + \text{ك}$   
لانه اذا رمز بالحرف  $\text{س}$  للكمية الاولى  $\text{ح} + \text{د} + \text{ه} + \dots + \text{ل}$   
فتربيع الاخرى يكون  $(\text{س} + \text{ك})^2 = \text{س}^2 + 2\text{سك} + \text{ك}^2$   
ثم يبدل رمز  $\text{س}$  بمقداره فيحدث

$$(\text{ح} + \text{د} + \text{ه} + \dots + \text{ل} + \text{ك})^2 = (\text{ح} + \text{د} + \text{ه} + \dots + \text{ل})^2 + 2\text{ك}(\text{ح} + \text{د} + \text{ه} + \dots + \text{ل}) + \text{ك}^2$$

وحيث أن الجزء الاول  $(\text{ح} + \text{د} + \text{ه} + \dots + \text{ل})^2$  من الطرف  
الثاني عين مربع الكمية ذات الحدود الاولى التي عدد حدودها  $\text{م}$  وان  
الجزء الثاني  $2\text{ك}(\text{ح} + \text{د} + \text{ه} + \dots + \text{ل})$  من الطرف المذكور  
مركب من ضعف حاصل ضرب الحدود التي عددها  $\text{م}$  في الحد الجديد  
مركب من ضعف حواصل ضرب الحدود مثني وان الجزء الثالث وهو  $\text{ك}^2$   
من الطرف المذكور مكون من تربيع الحد الجديد يكون مربع كمية ذات  
حدود عددها  $\text{م} + 1$  مشتة لاعلى حاصل جمع مربعات جميع حدودها  
وضعف حواصل ضرب حدودها مثني فاذا كانت قاعدة التكوين هذه مطردة  
في كمية ذات حدود تكون مطردة أيضا في كمية ذات حدود عددها زائد عن  
الاولى بواحد فيث كانت مطردة في كمية ذات ثلاثة حدود تكون مطردة في كمية  
ذات اربعة حدود وخمسة حدود وهكذا

\* (تنبيه) \*

يلفظ بهذه القاعدة بكيفية نافعة في النتائج التي يراد استخراجها بان يقال  
مربع كمية ذات حدود يحتوي على مربع الحد الاول زائدا ضعف حاصل  
ضرب الحد الاول في الثاني زائدا مربع الثاني زائدا ضعف حاصل ضرب كل  
من الحدين الاول والثاني في الثالث زائدا مربع الثالث زائدا ضعف حواصل

ضرب كل من الحد الاول والثاني والثالث في الحد الرابع زائدا مربع الحد الرابع وهكذا

(٥٩) اذا طلب الآن استخراج الجذر التربيعي لكمية ذات حدود كالكمية

١ + س + ج + د + الخ بفرض أ + س + ج + د + الخ  
الجذر المطلوب ثم بفرض أن هاتين الكميتين مرتبتان بحسب الدرجات  
التنازلية لحرف كالحرف س يجرى العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l} ١ + س + ج + د + الخ & ١ + س + ج + د + الخ \\ \hline & ٢ أ + س + ج + د + الخ \\ & ٢ أ + س + ج + د + الخ \\ & ٢ أ + س + ج + د + الخ \end{array}$$

فالكمية ذات الحدود ١ + س + ج + د + الخ يمكن اعتبارها

حاصل ضرب كمية أ + س + ج + د + الخ في أ + س + ج + د + الخ  
وحيث ان هذا الحاصل مرتب كضروبيه بحسب الدرجات التنازلية للحرف

س المذكور يكون ١ حاصل ضرب أ في أ أي مربع أ ( كما في تنبيه

بند ١٤ ) فبناء عليه يستخرج أ وهو اول حد من الجذر باخذ الجذر  
التربيعي للحد الاول من الكمية ذات الحدود المعلومه ثم يربع هذا الحد الناتج  
ويطرح منها فيسمى الحد الاول وهو ١ ويكون الحد الثاني س من الكمية  
المذكورة ضعف حاصل ضرب اول حد من الجذر في حده الثاني لانه اذا مر

الى س + ج + د + الخ بالحرف ر يحدث ١ + س + ج + د + الخ

$(١ + ر) = ١ + ٢ أ ر + ر^٢$  وبطرح الكميتين المتساويتين ١ و أ  
من كل من الطرفين ووضع ر مضروباً مشتركاً يحدث

س + ج + د + الخ = ر (٢ أ + ر) واذا وضع بدل ر مقداره  
يحدث

$$- + \delta + \epsilon + \zeta = (\zeta + \delta + \epsilon)(\zeta + \delta + \epsilon + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{16})$$
 وحيث ان الكمية ذات الحدود  $- + \delta + \epsilon + \zeta$  المرتبة بحسب  
 الدرجات التنازلية لحرف الترتيب مساوية لحاصل ضرب الكمية  
 $\zeta + \delta + \epsilon + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{16}$  في الكمية  $\zeta$   
 المرتبتين كترتيبها يكون الحد الاول  $-$  من الاولى مساويا لحاصل ضرب  
 حدة  $\zeta$  في  $\zeta$  من الكميتين الاخرين وبناء عليه يستنتج الحد الثاني  
 $\zeta^2$  من الجذر بتقسيم الحد الاول  $-$  من الباقي الاول على  $\zeta$  وهو ضعف  
 الحد الاول من الجذر وحيث علم حدة  $\zeta^2$  يطرح ضعف حاصل ضرب الحد  
 الاول من الجذر في الحد الثاني منه ثم مربع الحد الثاني اى يطرح حاصل ضرب  
 $\zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8$  من الكمية  $- + \delta + \epsilon + \zeta$  فيبقى باق بهذه  
 الصورة  $\delta + \epsilon + \zeta$  الحد الاول ضعف حاصل ضرب اول حدة من  
 الجذر في الحد الثالث منه  $\zeta^4$  لانه اذا رمز بالحرف  $\zeta$  للحدين  $\zeta^2 + \zeta^4$   
 وبالحرف  $\zeta$  للحدود الباقية من الجذر وهى  $\delta + \epsilon + \zeta$  ينتج  

$$+ + \delta + \epsilon + \zeta = (\zeta + \zeta^2)(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{16})$$
 أو  $\delta + \epsilon + \zeta = \zeta(\zeta + \zeta^2)$   
 أو  $\delta + \epsilon + \zeta = (\zeta + \zeta^2)(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{16})$   
 وحيث أن الكمية  $\delta + \epsilon + \zeta$  حاصل ضرب الكمية  $\delta + \epsilon + \zeta$  في الكمية  
 $\zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{16}$  المرتبتين كترتيبها يكون  $\delta$   
 مساويا لحاصل ضرب  $\zeta^2$  في  $\zeta$  وبناء عليه يستنتج الحد الثالث من الجذر

بتقسيم الحد الاول من الباقي الثاني على ضعف الحد الاول من الجذر المذكور ومثل ذلك يجري في استخراج باقي حدود الجذر وينتج من ذلك قاعدة تذكرها فنقول

(قاعدة) لاستخراج الجذر التربيعي للكمية ذات حدود ترتب بحسب الدرجات التصاعدياً والتنازلياً لحد حروفها ثم يستخرج الجذر التربيعي لحدّها الاول فيكون الحد الاول من الجذر المطلوب ثم يربع هذا الحد ويطرح من الكمية ذات الحدود المعلومه ثم يقسم الحد الثاني من الكمية المعلومه على ضعف الحد الاول من الجذر فينتج الحد الثاني من الجذر المطلوب فيضعف حاصل ضرب اول حد من الجذر في الحد الثاني منه ثم يضم الى الضعف المذكور تربيع هذا الحد ويطرح المجموع من الباقي الاول ثم يقسم الحد الاول من الباقي الجديد على ضعف الحد الاول من الجذر فينتج الحد الثالث من الجذر ثم يكون ضعف حاصل ضرب الحد الاول والثاني من الجذر في الثالث ويضاف على الحاصل مربع حد الجذر الثالث ويطرح المجموع من الباقي الثاني ولايجاد الحد الرابع من الجذر يقسم الحد الاول من الباقي الثالث على ضعف الحد الاول من الجذر ثم يجري باقي العمل على اسلوب ما تقدم

ولتطبيق هذه القاعدة على استخراج الجذر التربيعي للكمية ذات الحدود

$$٢٢ ٢٨ + ٥ ١٢ - ٤ ١٢ + ٣ ٩ - ٢ ١٦ + ١ ٥ \text{ ترتب بحسب}$$

الدرجات التصاعديّة للعرف و يجري العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} ٢ \\ ٢٣ + ٥٢٢ - ٥٤ \end{array} & \begin{array}{r} ٤ \\ ٢٩ + ٥٢١٢ - ٥٢٢٨ + ٥٢١٦ - ٥١٦ \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} ٢ \\ ٥٢٢ - ٥٨ \end{array} & \begin{array}{r} ٤ \\ ٥١٦ - \end{array} \end{array}$$

الباقى الاول  $٢٩ + ٥٢١٢ - ٥٢٢٨ + ٥٢١٦ - ٥١٦$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} ٢ \\ ٢٣ + ٥٢٤ - ٥٨ \end{array} & \begin{array}{r} ٢٢ \\ ٥٢٤ - ٥٢١٦ + \end{array} \end{array}$$

الباقى الثانى  $٢٩ + ٥٢١٢ - ٥٢٢٤ +$

$$\begin{array}{r} ٤ \\ ٢٩ - ٥٢١٢ + ٥٢٢٤ - \end{array}$$

الباقى الثالث .. ..

بأن يستخرج الجذر التربيعى للحد  $١٦$  فيكون  $٤$  هو الحد الاول للجذر ثم يربع هذا الحد ويطرح من الكمية ذات الحدود المعلومة فيحدث باق

$$- ١٦ + ٢٨ - ٢٢ + ١٢ - ٩$$

الذى هو ضعف الحد الاول من الجذر فينتج الحد

الثانى للجذر وهو  $٢$  ولتحصيل ضعف حاصل ضرب الحد الاول

من الجذر فى الثانى وتحصيل مربع الحد الثانى يكتب هذا الحد الاخير على

شمال ضعف الحد الاول ثم بضرب الناتج وهو  $٨$  على  $٢$  فى الحد

الثانى  $٢$  ثم يطرح الحاصل من الباقى الاول فيحدث باق ثان

$$٢٤ - ١٢ + ٩$$

الحد الاول من الجذر  $٨$  فينتج الحد الثالث  $٣$  من الجذر

ولتكوين ضعف حاصل ضرب الحد الاول والثانى فى الثالث ومربع الثالث

يكتب هذا الحد الاخير على شمال ضعف الحد الاول والثانى ثم بضرب الناتج

$$٨ - ٤ + ٣$$

\* (٨٢) \*

الباقى الثانى فيكون الباقى الجديد صفرا فاذا ن يكون الجذر التربيعى للكمية

$$\text{ذات الحدود المعلومة } ٤ - ٢ - ٢ + ٣ = ٢$$

\* (تتاييه) \*

الاول يمكن ان يجرى هنا ما جرى فى القسمة بطرح كل حاصل ضرب واختصار

الحدود المتشابهة من اول الامر هكذا

$$\begin{array}{r|l} ٢ & ٤ \quad ٣ \quad ٢٢ \quad ٣ \quad ٤ \\ ٢٣ + ٤ - ٤ & ٩ + ١٢ - ٢٨ + ١٦ - ١١ \\ \hline ٢ & ٤ \quad ٣ \quad ٢٢ \\ ٤ - ٨ & ٩ + ١٢ - ٢٤ + \\ \hline ٢ & \dots \dots \dots \\ ٢٣ + ٤ - ٨ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ \\ ٢٣ + ٤ - ٨ \\ ٢ \\ ٢٣ + \end{array}$$

الثانى اذا غيرت علامات حدود الجذر ٤ - ٢ - ٢ + ٣ فقدره

انجرى لا يتغير لانه اذا رمز للكمية ٤ - ٢ - ٢ + ٣ بالحرف ر تكون الكمية الجديدة الحادثة بعد التغير - ر وتكون الكمية ذات

$$\text{الحدود المعلومة } ٤ - ٢ - ٢ + ٣ = ٩$$

مربعا كاملا للكمية ر فتكون كذلك للكمية - ر (كافى بند ٥٦)

وحينئذ يكون الجذر الكمية المعلومة مقدارا متميزا هـ ما

$$(٤ - ٢ - ٢ + ٣) \text{ و } (٤ - ٢ - ٢ + ٣) \text{ والاخير}$$

ناتج من وضع علامة ناقص امام الاول

الثالث الكمية ذات الحدود المرتبة بحسب حرف مربع كامل اذا كان

حدها الاول مربعا كاملا وحدها الثانى قابلا للقسمة على ضعف جذر الحد

الاول او كان حدها الاخير مربعا كاملا والذى قبله قابلا للقسمة على ضعف

الحد الاخير وكان مع ذلك الحد الاول من كل باقى جري العمل قابلا للقسمة على ضعف الحد الاول من الجذر .

الرابع الكمية ذات الحدود المرتبة بحسب الدرجات التنازلية لحرف يعرف انها غير مربع كامل متى كان ضعف اس هذا الحرف فى الحد الاخير من الجذر اقل من اس هذا الحرف فى الحد الاخير من الكمية ذات الحدود المعلومة لان الحد الاخير من الكمية ذات الحدود المعلومة يجب ان يكون مربع الحد الاخير من الجذر فيكون اس حرف الترتيب فى الحد الاخير من الكمية ذات الحدود المعلومة ضعف اس هذا الحرف فى الحد الاخير من الجذر وحيث ان ضعف اس حرف الترتيب فى الحد الاخير من الجذر اقل من اس حرف الترتيب فى الحد الاخير من الكمية المعلومة وان اس حرف الترتيب فى الجذر لا تزل متناقصة لا ينتج فى الجذر حد مربعه مساو للحد الاخير من الكمية ذات الحدود المقروضة فحينئذ لا يمكن انتهاء العملية

الخامس ذات الحدين لا تكون مربعا كاملا ابدا لان مربع الحد وحد مربع ذات الحدين ثلاثة حدود ومربع ذات الحدود اربعة حدود اقل ما هنالك

(٦٠) متى اريد استخراج الجذر التربيعي لكمية ذات حدود بعضها مشتمل على حرف الترتيب باس واحد توضع هذه الكمية كوضعها فى عمل التقسيم المتقدم فى (بند ٢١) فحينئذ تؤل العمليات الجزئية المبينة بالقاعدة العمومية من البند المذكور الى استخراج الجذر التربيعي للكمية المعلومة او الى تقسيم كمية ذات حدود على اخرى

(٦١) قد سبق الكلام على استخراج الجذر التربيعي للكميات الجبرية الصحيحة ولا استخراج الجذر التربيعي للكسور نسلك الطريقة المقررة فى علم الحساب لان مربع الكسر يتكون برفع حديه للدرجة الثانية فحينئذ يستخرج جذر الكسر باستخراج الجذر التربيعي لكل من حديه

\* (فى حساب الجذور الصم ذات الدرجة الثانية والثالثة) \*

(٦٢) الجذران الايمان بكونان متشابهين اذا اتحدت درجتهم



واتحدت الكميات الموضوعة تحت علامتهما جذرا

$$\sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \text{ و } \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{ز}} \text{ و } \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{ح}}$$

متشابهان وكذلك جذرا

\*(الكلام على جمع تلك الجذور وطرحها)\*

مكرر الجذر يدل على عدد مرات تكرار هذا الجذر فحينئذ جمع جذرين متشابهين أو طرحهما يكون بجمع أو طرح مكرريهما ثم وضع حاصل الجمع أو باقى الطرح امام الجذر المشترك فاذن يكون

$$\sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \text{ و } \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} + \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}}$$

$$\text{و } \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} + \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \text{ و } \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} + \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}}$$

$$\text{و } \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} - \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \text{ و } \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} - \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}}$$

ومتى كان الجذران غير متشابهين لا يمكن بيان حاصل جمعهما أو فاضلهما إلا بالعلامة

\*(فى الكلام على ضرب تلك الجذور)\*

لايجاد حاصل ضرب جذرين متحدى الدرجة تضرب الكميتان الموضوعتان تحت علامتى الجذر فى بعضهما ثم يوضع الحاصل تحت علامة الجذر المذكور مثال ذلك

$$\sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \times \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \times \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \text{ لان } \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \times \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}}$$

$$\sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \times \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \times \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \times \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}}$$

$$= \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \text{ اعنى ان مربع } \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \text{ يساوى } \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \text{ فاذن يكون}$$

$$\sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \times \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \text{ وبهذا يثبت المطلوب}$$

ومثل هذا يجري فى ايجاد حاصل ضرب جذرين بدرجة ثالثة (وكان يمكن الاستغناء عن اثبات هذه القاعدة بما تقدم فى (بند ٥٤) من أن  $\sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \times \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}}$

$$= \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \text{ فاذن يقال } \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} \times \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ}} \sqrt[3]{\text{و}} \sqrt[3]{\text{ز}}$$

واذا كان للجذرين مكرران يضرب هذان المكرران فى بعضهما ويوضع حاصل ضربهما امام الجذر فينشذ

$$\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{35} = \sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{5} \times \sqrt{7}$$

$$\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{35} = \sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{5} \times \sqrt{7}$$

\*(في قسمة الجذور)\*

لتقسيم جذر على آخر متحد في الدرجة تقسم احدى الكميتين اللتين تحت علامتي الجذر على الاخرى ويوضع على خارج القسمة علامة الجذر فينتد

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \left( \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} \right) \text{ لان } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \text{ ويكون ايضا } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

وكذا يقال فيما اذا كان الجذران بدرجة ثالثة

واذا كان الجذرين مكرران يقسم احدهما على الاخر ويوضع خارج قسمتهما امام الجذر فينتد

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \text{ و } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

(٦٣) القواعد التي تقدم بيانها لا توافق حالة ضرب حدين تخيلين ولا حالة

تقسيم حد حقيقي على آخر تخيلي

فعلى مقتضى التعريف يكون مربع  $\sqrt{1-1}$  مساويا  $1-1$  أي

$$\sqrt{1-1} \times \sqrt{1-1} = 1-1 \text{ ومنه يحدث } \frac{1}{\sqrt{1-1}} = \sqrt{1-1}$$

فينتج من ذلك أن

$$\sqrt{1-1} \times \sqrt{1-1} = 1-1$$

$$\sqrt{1-1} = \left( \frac{1}{\sqrt{1-1}} \right) \sqrt{1-1}$$

$$\sqrt{1-1} = \frac{1}{\sqrt{1-1}} \times \sqrt{1-1} = \frac{1}{\sqrt{1-1} \times \sqrt{1-1}} = \frac{1}{1-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-1}} \times \sqrt{1-1}$$

(٦٤) اذا كان مقام الكسر اصم فن المهم تحويله الى منطق  
فاذا كان المقام الاصم ذو الحد الواحد جذرا بدرجة ثانية لزم تحويله ضرب  
كل من حدى الكسر فى مقامه فحينئذ

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

واذا كان المقام الاصم ذو الحد الواحد جذرا بدرجة ثالثة يكفى تحويله  
ان يضرب كل من حدى الكسر فى تربيع هذا المقام فحينئذ

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2^2} = \frac{2}{2^2 \sqrt[3]{2}}$$

واذا كان المقام الاصم مشتملا على كمية ذات حدين احدهما أو كلاهما جذر  
بدرجة ثانية يكفى تحويله ان يضرب حدى الكسر فى كمية ذات حدين مركبة  
من الحد الاول من المقام ومن حده الثانى مسبوقا بعلامة مخالفة لعلامته  
لان من المعلوم أن حاصل ضرب مجموع كيتين فى فاضلهما يساوى فاضل  
مربعيهما فاذا ن يكون

$$\frac{(\sqrt{2}-e)^2}{2} = \frac{(\sqrt{2}-e)^2}{(\sqrt{2}-e)(\sqrt{2}+e)} = \frac{\sqrt{2}+e}{\sqrt{2}+e}$$

$$\frac{(\sqrt{2}+e)^2}{2} = \frac{(\sqrt{2}+e)^2}{(\sqrt{2}+e)(\sqrt{2}-e)} = \frac{\sqrt{2}-e}{\sqrt{2}-e}$$

$$\frac{(\sqrt{2}-\bar{e})^2}{2} = \frac{(\sqrt{2}-\bar{e})^2}{(\sqrt{2}-\bar{e})(\sqrt{2}+\bar{e})} = \frac{\sqrt{2}+\bar{e}}{\sqrt{2}+\bar{e}}$$

$$\frac{(\sqrt{2}+\bar{e})^2}{2} = \frac{(\sqrt{2}+\bar{e})^2}{(\sqrt{2}+\bar{e})(\sqrt{2}-\bar{e})} = \frac{\sqrt{2}-\bar{e}}{\sqrt{2}-\bar{e}}$$

وهذه التحاويل تجرى حين يكون المقام الاصم مشتملا على كمية ذات حدود  
بعضها أو جميعها جذر بدرجة ثانية مثال ذلك

مقدار  $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}$  يمكن اعتباره مقامه كمية ذات حدين  
 حدها الاول  $\sqrt{7} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$  والثاني  $\sqrt{7} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$  فاذا ضرب كل من  
 حدى هذا الكسر في الكمية ذات الحدين المذكورة بان غيرت علامة حدها  
 الثانى آل

$$\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2})} \text{ الى } \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$$

وبضرب حدى هذا الناتج الاخير في  $(1 + \sqrt{7})$  يحدث

$$= \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2})(1 + \sqrt{7})}{(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$$

$$\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$$

وباختصاره يحدث

$$= \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$$

$$\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$$

(٦٥) اذا اشتملت متساوية على كيات منطقة وكيات غير منطقة كانت  
 اجزاء المنطقة في احد الطرفين مساوية لاجزائها في الطرف الاخر وكذا اجزاء  
 غير المنطقة

فاذا فرضت متساوية  $\sqrt{7} + \sqrt{3} = \sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$  وفرض أن  $\sqrt{7} + \sqrt{3}$  و  
 غير منطقي وأن  $\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$  منطقي كان  $\sqrt{7} + \sqrt{3} = \sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$  و  
 لانه بتحويل  $\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$  الى الطرف الثانى من المتساوية  $\sqrt{7} + \sqrt{3} = \sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$   
 $\sqrt{7} + \sqrt{3} - \sqrt{7} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{7} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$

واذا فرض أن  $هـ = ح = م$  ورفع كل من الطرفين إلى الدرجة الثانية  
حدث

$$م^2 = م^2 + و + م^2 + و^2$$

$$م^2 = م^2 + و = م^2 + و^2$$

وهي متساوية مستحيمة لان الكمية المنطقة  $م^2 = م^2 + و$  لا تكون

مساوية للكمية غير المنطقة  $م^2 + و^2$  الا اذا فرض  $م = و$ .

وحيث أن  $م = هـ = ح$  يكون  $هـ = ح$  فحيث كان

$هـ = ح$  ينتج من المتساوية  $م^2 + و = م^2 + و^2$   $هـ = و$  و

أن  $و = و^2$  فحيث يكون

$$و = و^2$$

(٦٦) كل مقدار بهذه الصورة  $و + و^2$  يمكن تحويله بالسهولة

إلى مقدار بهذه الصورة  $و + و^2$  بحيث تكون كميات  $و$  و  $و^2$

الداخله في هذين المقدارين منطقة

وللاصول إلى ذلك ترفع الكمية  $و + و^2$  إلى الدرجة الثانية فتصير

$$(و + و^2) = و^2 + و + و^2$$

لكل من الطرفين فيحدث

$$\sqrt{و^2 + و + و^2} = \sqrt{و^2 + و + و^2} = و + و^2$$

واذا فرض أن  $و = ح$  و  $و^2 = ح^2$  يحدث

$$\sqrt{و + و^2} = و + و^2$$

وبالعكس يمكن تحويل مقدار  $و + و^2$  إلى آخر بهذه الصورة

$$و + و^2$$

$\sqrt{2} + \sqrt{2}$  بحيث تكون كيات  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  جذرية  
وللوصول الى ذلك يربع كل من طرفي المتساوية

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \text{ ف يحدث}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \text{ وبمقتضى ما تقدم في (بند}$$

(٦٥) يحدث

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ و } (١) \dots\dots\dots \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ (٢)}$$

واذا ربع كل من طرفي المتساوية (١) وطرح من الناتج المتساوية (٢)

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \text{ يحدث}$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} \text{ (٣) } \dots\dots\dots$$

ويحدث أيضا من المتساويتين (١) و (٣)

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \text{ و } \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

وبحيث فرض أن  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  منطقان يلزم أن يكون  $\sqrt{2} - \sqrt{2}$  مربعا

كاملا فاذا رمز لهذا المربع بالحرف هـ يحدث

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \text{ و } (٤) \dots\dots\dots \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} \text{ (٥)}$$

أعني انه يلزم لامكان تحويل مقدار  $\sqrt{2} + \sqrt{2}$  الى مقدار بهذه الصورة

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} \text{ أن يكون } \sqrt{2} - \sqrt{2} \text{ مربعا كاملا فاذا رمز لهذا المربع}$$

بالحرف هـ يعلم المقداران  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  من القانونين

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \text{ و } \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

\* (٩٠) \*

\* (تنبيه) \*

قد فرض في المتساوية  $\sqrt{7} + \sqrt{5} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$  ان الجذور  
 الاربعة موجبة وحيث تقدم ان  $\sqrt{7} + \sqrt{5} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$   
 ينتج منه ان  $\sqrt{7} = \sqrt{7}$  فاذن يلزم ان تكون علامتا الجذرين  
 $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{5}$  متحدين فتكون علامة  $\sqrt{7}$  موجبة اذا كانت  
 علامتا  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{5}$  متحدين وتكون علامته سالبة اذا كانت علامتا  
 $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{5}$  متخالفين اعني اذا كانت علامة  $\sqrt{7}$  موجبة تكون  
 علامتا  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{5}$  متحدين واذا كانت علامة  $\sqrt{7}$  سالبة  
 تكون علامتا  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{5}$  متخالفين

ولنطبق ما ذكرناه على مثالين فنقول

المثال الاول اذا ارد تحويل المقدار  $\sqrt{7} + \sqrt{5}$  الى جذرين  
 منفردين يكون بمقتضى ما تقدم  $\sqrt{7} = 7$  و  $\sqrt{5} = 5$  ومنه

يحدث  $\sqrt{7} - \sqrt{5} = 9$  وحيث ان  $\sqrt{7} - \sqrt{5} = 9$  مربع كامل

يمكن تحويل مقدار  $\sqrt{7} + \sqrt{5}$  الى مقدار بهذه الصورة

$\sqrt{7} + \sqrt{5} = \sqrt{7} - \sqrt{5} = 9$  يكون  $9 = 9$

او  $9 = 3$  ويكون ايضا  $9 = 7 + 2 = 9$  و  $9 = 7 + 2 = 9$

فاذن يكون  $\sqrt{7} + \sqrt{5} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$  وتكون  
 علامتا  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{5}$  متحدين لان  $\sqrt{7} + \sqrt{5}$  له علامة +

المثال الثاني اذا فرض ان المراد تحويل المقدار  $\sqrt{7} - \sqrt{5}$  الى

ما ذكر يكون بمقتضى ما تقدم  $\sqrt{7} = 7$  و  $\sqrt{5} = 5$  و  $\sqrt{7} - \sqrt{5} = 2$

اعني

\* (٩١) \*

أعني  $ه = ١$  فاذن يكون  $د = \frac{١+٣}{٢} = ٢$  و  $ز = \frac{١-٣}{٢} = -١$   
فحينئذ يكون

$٢ - ٣ \sqrt{٢} = \sqrt{٢} - ٢ \sqrt{٢} = -\sqrt{٢}$  أعني  $١ - \sqrt{٢}$   
انه يلزم أن تكون علامتا  $\sqrt{٢}$  و  $-$  متخالفتين لان الحد  
 $\sqrt{٢}$  له علامة ناقص

\* (في المعادلات والمسائل ذات الدرجة الثانية) \*

\* (في المعادلات ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد) \*

(٦٧) المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد هي المحتوية على  
مجهول أسه الاعظم مساو ٢ وتنقسم المعادلة المذكورة الى معادلة تامة  
وغير تامة

فغير التامة هي المحتوية على المجهول بدرجة ثانية فقط كمعادلة  $حس = د$   
وتسمى معادلة ذات حدين  
والتامة هي المحتوية على المجهول بدرجة اولى وثانية كمعادلة

$حس + دسم + ه = ٠$  وتسمى معادلة ذات ثلاثة حدود  
\* (في المعادلة غير التامة ذات الدرجة الثانية) \*

(٦٨) كل معادلة غير تامة متشعبة كانت أو غير متشعبة يمكن تحويلها الى

معادلة بهذه الصورة  $حس = د$  فيها رمزا  $ح$  و  $د$  يدلان على  
كيتين صحيحتين سالبتين أو موجبتين ومنها يستخرج  $س = \frac{د}{ح}$  أو  $س =$   
 $\pm \sqrt{\frac{د}{ح}}$  بملاحظة أن الجذر التربيعي لكمية يكون مسبوقا بعلامة  
 $\pm$  فاذا فرض أن  $م$  رمز للكسر  $\frac{د}{ح}$  يكون للمجهول  $س$  مقداران  
متساويان ومتخالفان في العلامة أي

$س = + \sqrt{م} \text{ و } س = - \sqrt{م}$   
\* (تنبيه) \*



لا يكون جذر الطرف الثاني مسبوقاً بعلامة  $\pm$  وحده بل جذر للطرف  
الاول كذلك فاذن يحدث  $\pm = س$  و  $\pm = م$  ومنها يحدث أربعة  
مقادير للمجهول  $س$  وهى

$$+ س = م + م و م = م - م و - س = م + م و - س = م - م$$

فاذا غيرت علامتا المقدارين الاخيرين صارامتا باقين مع الاولين الحادثين  
من مقدارى الجذر التربيعى المسبوق بعلامة  $\pm$  للطرف الثانى فاذن  
لا يكون للمجهول  $س$  الا مقداران حقيقيان

وتحقق أن  $س$  له مقداران فقط ان يوضع بدل  $م$  المقدار  $(م)$   
عوضاً عنه فى المعادلة  $س = \frac{م}{س} = م$  فتؤول الى  $س = (م)$ .

وحيث أن  $س = (م) = (س + م) (س - م)$   
يحدث  $(س + م) (س - م) = ٠$

فلاجل أن يكون الطرف الاول الذى هو حاصل ضرب مساويا لصفر يلزم أن  
يكون كل من مضروبى الطرف الاول مساويا لصفر اذا تقرر ذلك  
نوصل الى

$$س + م = م و س - م = م و س + م = م و س - م = م$$

فالمجهول الداخلى فى المعادلة ذات الدرجة الثانية غير التامة يكون له  
مقداران فقط يسميان جذرى المعادلة وهذان الجذران يكونان متساويين  
ومتخالفين فى العلامة ويكونان حقيقيين وتخيليين بحسب كون  $م$  موجبا  
أو سالبا

(٦٩) ولنطبق القاعدة المتقدمة على مثالين مخصوصين فنقول  
المثال الاول ان يفرض أن المطلوب حل هذه المعادلة

$$س + م = ٠$$

(١٣)\*

$$= \frac{س + ٢}{س}$$

فيحذف المقامات يحدث  $س + ٨ = ٨ - س$  ~~س + ٨ = ٨ - س~~  
ثم تحول الكميات المعلومة الى الطرف الثاني والمجهولة الى الاول وتختصر  
الحدود المتشابهة فيحدث

$$س = ١٦ \text{ أو } س = \pm \sqrt{١٦} = \pm ٤$$

فاذا ضربنا الحرفين  $س$  و  $س$  بلحذر المعادلة يكون

$$س = س + ٤ \text{ و } س = س - ٤$$

المثال الثاني أن يفرض ان المطلوب حل المعادلة  $\frac{س - س}{س} = س + ٥$   
فباجراء العمل كما تقدم في المثال الاول يحدث

$$س - س = س + ٥ \text{ أو } س - س = س - ٥$$

$$س = س - ٥ \text{ أو } س = س + ٥$$

$$س = \pm \sqrt{٢٥} = \pm ٥$$

أعني أن جذري المعادلة يكونان تخيليين

(في المعادلة التامة ذات الدرجة الثانية)\*

(٧٠) كل معادلة تامة بدرجة ثانية يمكن ايلولتها الى هذه الصورة

$س + دس + ه = ٠$  التي فيها الرموز  $س$  و  $د$  و  $ه$  تدل  
على كميات موجبة كانت أو سالبة فاذا قسم كل من طرفي هذه المعادلة على

$$س \text{ نصير } س = ١ + \frac{د}{س} + \frac{ه}{س} = ٠$$

واذا فرض أن  $\frac{د}{س} = ع$  و  $\frac{ه}{س} = ك$  يحدث

$$س + ع + ك = ٠$$

(٢٤)\*

ولحل هذه المعادلة يلاحظ انه اذا كانت المعادلة المذكورة بهذه الصورة  
 $s^2 + 2cs + s^2 = r^2$  أى أن طرفها الاول مربع كامل للكمية  
 ذات الحدين  $s + c$  يمكن تحويلها الى معادلة بدرجة اولى بان يؤخذ  
 الجذر التربيعى لكل من طرفيها فينتدبسمحل حلها

وتحويل المعادلة  $s^2 + 2cs + s^2 = r^2$  الى الصورة المتقدمة  
 يحول  $r^2$  الى الطرف الثانى فتؤول الى  $s^2 + 2cs = r^2 - s^2$   
 ثم يعتبر  $s^2 + 2cs$  حدين لمربع  $s^2 + 2cs + c^2$  كمية ذات حدين  
 فيكون  $s^2 + 2cs + c^2$  مربع الحدين الاول لها و  $c^2$  ضعف حاصل  
 ضرب الحد الاول فى الثانى فيكون الثانى مساويا  $\frac{r^2 - s^2}{2s} = \frac{c^2}{2s}$  فاذا ضم  
 الى طرفى المعادلة  $s^2 + 2cs + c^2 = r^2 - s^2$  مربع الحد  $\frac{c^2}{2s}$  فنحدث  
 المعادلة

$$s^2 + 2cs + c^2 = \frac{r^2}{2s} + \frac{c^2}{2s} - \frac{r^2 - s^2}{2s}$$

التي طرفها الاول مربع كامل ومساو لمربع الكمية ذات الحدين  $s + c$   
 فاذا استخرج جذرا طرفيها يحدث

$$s + c = \sqrt{\frac{r^2}{2s} + \frac{c^2}{2s} - \frac{r^2 - s^2}{2s}}$$

$$s = \sqrt{\frac{r^2}{2s} + \frac{c^2}{2s} - \frac{r^2 - s^2}{2s}} - c$$

وينتج من هذا القانون الاخير ان المجهول  $s$  مقدارين فاذا مررناهما  
 بالرمزين  $s$  و  $s'$  يحدث

$$s = \sqrt{\frac{r^2}{2s} + \frac{c^2}{2s} - \frac{r^2 - s^2}{2s}} - c$$

وينتج ايضا من القانون المتقدم انه متى حوت المعادلة الثامنة ذات الدرجة

الثانية الى اخرى بهذه الصورة

$$س^٢ + ح + سم + ك = ٠$$

يكون مقدار المجهول مساويا لنصف مكرر الحد الثاني بعلامة مخالفة لعلامته زائدا أو ناقصا جذر مربع حاصل الجمع الناتج من ضم مربع نصف مكرر الحد الثاني الى الحد المعلوم بعلامة مخالفة لعلامته

\*(تنبيه)\*

قد وضع في اخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$$س^٢ + ح + سم = \frac{س^٢}{٤} + \frac{س^٢}{٤} - \frac{س^٢}{٤} \quad ك$$

امام الجذر التربيعي للطرف الثاني العلامة المضاعفة  $\pm$  مع انه ينبغي وضعها امام جذر الطرف الاول ايضا

لان  $س^٢ + ح + سم = \frac{س^٢}{٤} + \frac{س^٢}{٤} - \frac{س^٢}{٤}$  مربع الكمية ذات الحدين  $سم - \frac{س^٢}{٤}$  ايضا  
 لكن اذا وضعت العلامة  $-$  امام جذر الطرف الاول فالجذران الناتجان للمجهول  $سم$  بصيران بعد تغيير العلامة عين الجذرين الحادين من حين وضع علامة  $+$  فاذا نكتفي بوضع العلامة المضاعفة  $\pm$  امام الجذر التربيعي للطرف الثاني فقط

\*(تمريبات على حل المعادلات)\*

$$(٧١) \quad \text{اذا ارد حل المعادلة الرقبة التي هي } \frac{س^٥}{٦} - \frac{س^٢}{٣} + \frac{س^٣}{٤} =$$

$$٨ - \frac{س^٢}{٣} - س^٢ + \frac{٢٧٣}{١٢} \text{ تحول اولاهذه المعادلة الى اخرى}$$

بهذه الصورة  $س^٢ + ح + سم + ك = ٠$  ويتوصل الى ذلك بحذف المقامات فيحدث بعد حذفها من المعادلة المذكورة

$$١٠ س^٢ - ٦ سم + ٩ = ٩٦ - ٨ سم - ١٢ س^٢ + ٢٧٣$$

وتحويل جميع حدود هذه المعادلة الى الطرف الاول تول الى

$$٢٢س + ٢س^٢ - ٣٦٠ = ٠ \text{ أو } س^٢ + \frac{٢س^٢}{٢٢} - \frac{٣٦٠}{٢٢} = ٠$$

وبتطبيق القانون

$$س = \frac{-\frac{٢س^٢}{٢٢} \pm \sqrt{\left(\frac{٢س^٢}{٢٢}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{٣٦٠}{٢٢}\right)}}{2 \cdot 1}$$

$$س = \frac{-\frac{٢س^٢}{٢٢} \pm \sqrt{\frac{٢س^٢}{٢٢} + \left(\frac{١}{٢٢}\right)}}{2}$$

ويمكن حل المعادلة المذكورة  $س^٢ + \frac{٢س^٢}{٢٢} - \frac{٣٦٠}{٢٢}$  من اول الاضربان يحول  $س^٢ - \frac{٣٦٠}{٢٢}$  الى الطرف الثانى ويضم لكل من طرفيها  $\left(\frac{١}{٢٢}\right)$  وهو مربع نصف مكررا الجهمول  $س$  فيحدث

$$س^٢ + \frac{٢س^٢}{٢٢} - \frac{٣٦٠}{٢٢} = \left(\frac{١}{٢٢}\right) + \frac{٢س^٢}{٢٢} + س^٢$$

ثم باخذ الجذر التربيعى لكل من طرفيها يحدث

$$س + \frac{٢س}{٢٢} \pm \sqrt{\left(\frac{١}{٢٢}\right) + \frac{٣٦٠}{٢٢}} = \frac{١}{٢٢} + س$$

$$س - \frac{١}{٢٢} \pm \sqrt{\left(\frac{١}{٢٢}\right) + \frac{٣٦٠}{٢٢}} = س$$

وهو ناتج عين الناتج المتقدم من تطبيق المعادلة المذكورة على القانون العام فلم يبق حينئذ الا اجراء العمليات الحسابية اى تحويل الكسور الموجودة تحت علامة الجذر الى ذات مقام واحد بان يضرب حد الكسر  $\frac{٣٦٠}{٢٢}$  فى ٢٢ ثم يضم الكسر ان الموجودان تحت العلامة المذكورة الى بعضيهما

$$س = \frac{-\frac{١}{٢٢} \pm \sqrt{\frac{١ + ٢٢ \times ٣٦٠}{(٢٢)^2}}}{2}$$

فاذا اجريت عملية حساب  $١ + ٢٢ \times ٣٦٠$  واخرج العدد (٢٢) من تحت علامة الجذر ولو حظ ان العدد ٢٢ هو المقام المشترك يحدث

$$س = \frac{-\frac{١}{٢٢} \pm \sqrt{٧٩٢١}}{٢٢}$$

وحيث أن الجذر التربيعى للعدد ٧٩٢١ هو ٨٩ يكون

$$س =$$

\* (٩٧) \*

س =  $\frac{٨٩ \pm ١}{٢٢}$  واذا وضع كل من جذري المجهول س على  
حدته يحدث

$$س = \frac{٨٨}{٢٢} = \frac{٨٩ + ١}{٢٢} = ٤ \text{ و}$$

$$س' = \frac{٤٥}{١١} = \frac{٩٠}{٢٢} = \frac{٨٩ - ١}{٢٢}$$

\* (في المناقشات العمومية للمعادلات ذات الدرجة الثانية) \*

(٧٢) قد تقدم في حل معادلة تامة ذات درجة ثانية ان كل معادلة من هذا القبيل لها جذران وبرهان ذلك ايضا ان يقال كل معادلة تامة ذات درجة ثانية

كالمعادلة  $س^٢ + ح س + ك = ٠$  يمكن وضعها بهذه الصورة

$س^٢ + ح س + س = \frac{ح^٢}{٤} + \frac{ح^٢}{٤} - \frac{ح^٢}{٤} = \frac{ح^٢}{٤}$  بتحويل الحد المعلوم ك الى

الطرف الثاني واطافة  $\frac{ح^٢}{٤}$  الى كل من الطرفين فاذا لوحظ ان الطرف

الاول  $س^٢ + ح س + س = \frac{ح^٢}{٤} + س$  مساو  $(س + \frac{ح}{٢})$  وان الطرف الثاني

$\frac{ح^٢}{٤} - ك$  مساو  $\left( \frac{ح}{٢} - ك \right)$  ووضع هذان المقداران في المعادلة

المتقدمة وحول ما كان في الطرف الثاني الى الاول حدث

$$= \left( \frac{ح}{٢} + س \right) - \left( \frac{ح}{٢} - ك \right)$$

وحيث ان الطرف الاول مساو لفاضل مربعين يكون مساويا لحاصل ضرب مجموع جذريهما في فاضلهما اي مساويا

$$= \left( \frac{ح}{٢} + س \right) \left( \frac{ح}{٢} - ك \right)$$

فحيث ان الطرق الاول الذي هو حاصل ضرب مساو للطرف الثاني أي الصفر يلزم أن يكون احد مضروبيه مساويا لصفر وحيث انه محتمل على مضروبين تكون المعادلة متحققة بفرض كليهما مساويا للصفر أي

$$س = \sqrt{\frac{ك}{٤} - \frac{ع}{٤}} + \frac{ع}{٤} + س$$

$$س = \sqrt{\frac{ك}{٤} - \frac{ع}{٤}} - \frac{ع}{٤} + س$$

وبستخرج من ذلك مقدار المجهول س وهما عينتا المقدارين المعلومين سابقا وبهذا يثبت ان كل معادلة تامة بدرجة ثانية لها جذران فقط

\* (نبية) \*

ينتج من مقارنة المعادلة

$$٠ = \left( \sqrt{\frac{ك}{٤} - \frac{ع}{٤}} - \frac{ع}{٤} + س \right) \left( \sqrt{\frac{ك}{٤} - \frac{ع}{٤}} + \frac{ع}{٤} + س \right)$$

يجزى المجهول س أن الطرف الاول من معادلة ذات درجة ثانية بهذه

الصورة  $س + ع + س = ك$  يكون مركبا من حاصل ضرب كيتين كلتا هما ذات حدين ومحتوية على المجهول س بدرجة اولى فالحدان الاقلان منهما يكونان س والاخيران منهما يكونان جذرى س مأخوذين بعلامتين متخالفتين

وينتج من هذه الخاصية طريقة تركيب معادلة ذات درجة ثانية بعدمعرفة جذريها هي انه لتركيب معادلة بدرجة ثانية بعدمعرفة جذريها ٢ و - ٥ يجعل حاصل ضرب الكيتين ذاتى الحدين س - ٢ و س + ٥

مساويا للصفر فيحدث  $س + ٣ س - ١٠ = ٠$  وهى المعادلة المطلوبة فاذا حلت هذه المعادلة تحصل عدد ٢ و - ٥ وهما جذراها

(٧٣) حيث أن كل جذرى معادلة عامة بدرجة ثانية على هذه الصورة

$$س = \sqrt{\frac{ك}{٤} - \frac{ع}{٤}} + \frac{ع}{٤} \text{ و } س = \sqrt{\frac{ك}{٤} - \frac{ع}{٤}} - \frac{ع}{٤}$$

يحدث بجمعهم على بعضهما

س + س = س = س = س = س  
 أعني أن حاصل جمع جذري معادلة بدرجة ثانية مساوياً لـ ك والحد الثاني  
 بعلامة مخالفة لعلامته

وإذا ضرب الجذران المذكوران في بعضهما يحدث

$$\left( \sqrt{k - \frac{e^2}{4}} - \frac{e}{2} \right) \left( \sqrt{k - \frac{e^2}{4}} + \frac{e}{2} \right) = س + س = س$$

$$ك = ك + \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{4} = \left( \sqrt{k - \frac{e^2}{4}} \right)^2 - \left( \frac{e}{2} \right)^2 =$$

أعني أن حاصل ضرب جذري معادلة بدرجة ثانية يساوي حدها المعلوم  
 بعلامة مخالفة لعلامته إن كان في الطرف الثاني أو بعلامة إن كان  
 في الطرف الأول

\* (تنبيه) \*

ينتج من هاتين الخاصيتين طريقة تركيب معادلة بعد معرفة جذريها  
 فإذا فرض مثلاً أن المطلوب تحصيل معادلة ذات درجة ثانية جذراها  
 ٢ و ٥ كان حاصل جمع الجذرين المذكورين المأخوذ بعلامة مخالفة  
 لعلامته مساوياً ٣ وحاصل ضربهما مساوياً ١٠ وتكون المعادلة

$$المطلوبة س + س = ٣ - س = ١٠ = ٥$$

$$(٧٤) \text{ جذر المجهول } س \text{ المساويان } \pm \frac{e}{2} \sqrt{k - \frac{e^2}{4}} \text{ والمحتويان}$$

على علامة الجذر يكونان تخيلين متى كانت الكمية  $\frac{e^2}{4} - ك$  الموضوعة

تحت علامة الجذر سالبة وحيث أن  $\frac{e^2}{4}$  مربع كامل تكون علامته موجبة

دائماً وعلامة  $\frac{e^2}{4} - ك$  لا تتعلق حينئذ بالعلامة  $ك$  من المعادلة

$$س + س = س + ك = ٠ \text{ وبمقدارى } س و ك$$



فإذا كان  $\sqrt[n]{x}$  أصغر من صفر أو سالباً يكون  $- \sqrt[n]{x}$  موجباً ويكون

أيضاً  $\sqrt[n]{x}$  موجباً ويكون الجذران حقيقيين غير متساويين وإذا كان  $\sqrt[n]{x}$  مساوياً للصفر آلت الكمية الموضوعة تحت علامة الجذر إلى

$\sqrt[n]{x}$  وكان الجذران حينئذ حقيقيين

وإذا كان  $\sqrt[n]{x}$  موجباً يكون  $- \sqrt[n]{x}$  سالباً ويكون الكمية التي تحت

علامة الجذر  $\sqrt[n]{x}$  مركبة من كمية موجبة وكمية سالبة فعلاقة

الجذر تتعلق بالمقادير النسبية لهاتين الكميتين فإذا كان  $\sqrt[n]{x}$  أصغر من  $\sqrt[n]{x}$

كانت الكمية ذات الحدين  $\sqrt[n]{x}$  موجبة والجذران حقيقيين غير متساويين

وإذا كان  $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x}$  كانت الكمية ذات الحدين التي تحت علامة الجذر مساوية لصفر والجذران حينئذ حقيقيين ومتساويين وإذا كان  $\sqrt[n]{x}$  أكبر من

$\sqrt[n]{x}$  كانت الكمية ذات الحدين  $\sqrt[n]{x}$  سالبة والجذران تخيلين وهالك جدول لتأيج هذه المناقشة

$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{x}$	يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين	إذا كان
$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x}$	يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين	
$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{x}$	يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين	
$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{x}$	وكان $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x}$ يكون الجذران حقيقيين ومتساويين	
$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{x}$	يكون الجذران تخيلين	

(٧٥) يمكن من أول الأمر ادراك علامتي جذري معادلة بهذه الصورة

$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x}$  وذلك مؤسس على الخاصيتين

س = ك + و س = س - ح وبيان ذلك أن يقال  
اولا اذا كان ك أصغر من صفرا وسالبا تكون علامتا الجذرين متخالفتين  
لان حاصل ضربهما سالب وعلامة اكبرهما مخالفة لعلامة ح حيث كان  
حاصل جمعهما مساويا - ح

وثانيا اذا كان ك مساويا لصفري يكون أحد الجذرين مساويا لصفري لان  
حاصل ضربهما عدم ويكون الآخر مساويا لمكرر ح بعلامة مخالفة لعلامته  
وثالثا اذا كان ك اكبر من صفرا وموجبا يكون للجذرين علامة واحدة  
حيث كان حاصل ضربهما موجبا وتكون علامتهما مخالفة أيضا لعلامة  
ح ويمكن استنتاج ذلك من المقدارين

$$\left( \sqrt{\frac{f}{4}} - \frac{c}{4} \right) - \frac{c}{4} = س \quad \text{و} \quad \left( \sqrt{\frac{f}{4}} - \frac{c}{4} \right) + \frac{c}{4} = س$$

وهالك جدول لا يحتوى على التناح الحادثة من المناقشة المتقدمة

ك > . تكون علامتا الجذرين ح > . كان اكبرهما موجبا  
متخالفتين لكن ان كان ح < . كان اكبرهما سالبا  
اذا كان ك = . يكون احدا الجذرين صفرا والاخر مساويا - ح  
ك < . تكون علامتا الجذرين ح > . يكون الجذران موجبين  
متحدتين لكن ان كان ح < . يكون الجذران سالبين

(٧٦) لم يبق علينا الا ان نتحقق بعض حالات خاصة فنقول  
اولا قد شوهد في ما تقدم في الحالة التي كان فيها ك اكبر من صفرو مساويا  
ح أن الجذرين متساويان وذلك بمقتضى قانون

$$س = \frac{c}{4} \pm \sqrt{\frac{f}{4} - \frac{c^2}{16}}$$

بان يوضع في المعادلة س + ح س + ك = . بدل ك مقداره

قتصير  $س$  +  $ح$  +  $س$  +  $\frac{ع}{2} = ٠$  وهي معادلة يمكن وضعها بهذه

الصورة  $(س + \frac{ع}{2})^2 = ٠$  ومنها يحدث

$$٠ = (س + \frac{ع}{2})(س + \frac{ع}{2})$$

وهي معادلة تتحقق بالفرضين  $س = -\frac{ع}{2}$  و  $س = \frac{ع}{2}$  المتطابقين ومنها يستخرج الجذران  $س = -\frac{ع}{2}$  و  $س = \frac{ع}{2}$  المتساويان

وثانيا قد شوهد فيما تقدم في الحالة التي كان فيها  $ك = ٠$  أن أحد الجذرين مساو صفر والاخر مساو  $-ح$  ويمكن حدوث ذلك من القانون

$$س = -\frac{ع}{2} \pm \sqrt{\frac{ع^2}{4} - ك}$$

بمع  $س = ك$  و  $س = -ح$  لكن يمكن استنتاج ذلك

من اول الامر من المعادلة  $س + ح + س + ك = ٠$  لانه اذا فرض

فيها  $ك = ٠$  توّل الى  $س + ح + س = ٠$  واذا وضع فيها  $س$  مضروباً مشتركاً آلت الى  $س(س + ح) = ٠$  وهي معادلة تتحقق بالفرضين  $س = ٠$  و  $س = -ح$  اللذين يستخرج منهما  $س = ٠$  و  $س = -ح$

وثالثاً اذا فرض  $ح = ٠$  في القانون  $س = -\frac{ع}{2} \pm \sqrt{\frac{ع^2}{4} - ك}$

آل الى  $س = -\frac{ع}{2} \pm \sqrt{\frac{ع^2}{4} - ك}$  اعني أن جذري المجهول  $س$  يكونان متساويين ومتخالفين في العلامة  $\pm$  يمكن استنتاج ذلك من المعادلة

$س + ح + س + ك = ٠$  التي توّل في هذه الحالة الى معادلة غير تامة بهذه الصورة

$$س + ك = ٠ \text{ ومنها يستخرج } س = -ك$$

\* (١٠٣) \*

ورابعا اذا فرض أن  $ك = و$  و  $و = ح$  في ان واحد في القانون

$$س = \pm \frac{ح}{٢} - \sqrt{\frac{ح^2}{٤} - ك} \text{ أو في الارتباطين}$$

$$س + س = ح - ح و س = ك \text{ أو في المعادلة}$$

$$س + ح + س = ك = ٠ \text{ يكون جذرا المجهول س مساويين}$$

لصفر

(٧٧) ولنطبق القواعد العمومية على مناقشة بعض امثلة خصوصية  
فنعول

المثال الاول اذا فرضت معادلة  $٣ س + س = ٢ = ٠$  وقسم  
طرفها على مكرر س التالي

$$١ = \frac{٢}{٣} - س$$

وحيث ان الحد المعلوم سالب فالجذران يكونان حقيقيين غير متساويين  
وبناء عليه يكونان متخالفين في العلامة لان حاصل ضربهما يكون سالبا  
وايضاً حيث كان مكرر الحد الثاني موجبا يكون حاصل جمع الجذرين سالبا  
وبناء عليه يكونا كبرهما سالبا فينتد جذرا هذه المعادلة يكونان حقيقيين  
غير متساويين ومتخالفين لعلامة واكبرهما سالبا  
ولتحقيق ذلك يستخرج مقدارا المجهول س من المعادلة المعلومة  
فيعدث

$$س = \pm \frac{١}{٢} - \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{١}{٣٦}} = \frac{٢٤ \pm ١}{٦} = \frac{٢٥ \pm ١}{٦}$$

$$= \frac{٥ \pm ١}{٦} \text{ ومنه يستخرج}$$

$$س = \frac{٥ + ١}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣} \text{ و } س = \frac{٥ - ١}{٦} = ١$$

المثال الثاني اذا فرضت معادلة  $x^2 - 5x + 1 = 0$

وقسمت حدودها على ٦ آلت الى  $x^2 - 5x + 1 = 0$

وحيث أن الحد المعلوم موجب يلزم مقارنته بمربع نصف مكرر الحد الثاني

أعني مربع  $\frac{5}{2}$  ومن حيث أن مربع  $\frac{5}{2}$  يساوي  $\frac{25}{4}$  يلزم مقارنة

كسرى  $\frac{25}{4}$  و  $\frac{1}{6}$  بأن يضرب هذا الكسر  $\frac{1}{6}$  في ٢٤ فيؤول الى

$\frac{24}{144}$  وحيث أن الكسر  $\frac{24}{144}$  أصغر من  $\frac{25}{4}$  أي أن الحد المعلوم أصغر من

مربع نصف مكرر الحد الثاني يكون جذرا المعادلة حقيقيين غير متساويين

ومن حيث أن حاصل ضربهما موجب وهو  $\frac{1}{6}$  يكونان متحدين في العلامة

ومن حيث أن حاصل جمعهما وهو  $\frac{5}{6}$  موجب أيضا يكونان موجبين فينتد

يكون الجذران حقيقيين موجبين وغير متساويين لانه من القانون

$$\frac{1 \pm 0}{12} = \frac{24 - 20 \sqrt{1 \pm 0}}{12} = \frac{1}{2} - \frac{20}{144} \left| \pm \frac{5}{12} = x \right.$$

يحدث

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{12} = \frac{1-0}{12} = x \text{ و } \frac{1}{2} = \frac{6}{12} = \frac{1+0}{12} = x$$

المثال الثالث اذا فرضت معادلة  $x^2 + 14x + 49 = 0$

وقورن حدودها المعلوم الموجب المساوي ٤٩ بمربع نصف مكرر الحد

الثاني أي مربع ٧ يكون ٤٩ مساويا لهذا المربع فاذن يكون

الجذران حقيقيين ومتساويين وكل منهما مساويا لنصف مكرر الحد الثاني

بعلامة مخالفة لعلامته أعني أن كل جذر يكون مساويا - ٧ لان

$$x^2 + 14x + 49 = 0 \Rightarrow x = -7$$

المثال الرابع اذا فرضت معادلة  $x^2 + 7x + 7 = 0$  وقورن

حدودها المعلوم  $\frac{7}{4}$  بمربع نصف مكرر الحد الثاني أعني  $\frac{7}{4}$  يكون  $\frac{7}{4}$

أكبر

\*(١٠٥)\*

اكثر من  $\frac{1}{2}$  ويكون جذرا ~~المعادلة~~ <sup>مختلعا</sup> لان

$$\frac{3 - \sqrt{2 \pm 1}}{2} = \frac{3 - \sqrt{2 \pm 1}}{2} = \frac{3 - \sqrt{2 \pm 1}}{2} \left( \pm \frac{1}{2} - \right) = \frac{(3 - \sqrt{2 \pm 1})}{2}$$

(٧٨) قد تقدم انه يجب حل معادلة كمعادلة  $x^2 + 5x + 6 = 0$

أن تقسم جميع حدودها على  $x$  فيحدث  $x + \frac{5}{x} + \frac{6}{x} = 0$   
وأن يختصر الحساب بفرض  $\frac{5}{x} = y$  و  $\frac{6}{x} = z$  فلو ارد الآن  
حل المعادلة المذكورة بدون اجراء هذا الفرض حول  $\frac{5}{x}$  الى الطرف

الثاني فيحدث  $x^2 + \frac{5}{x} = -\frac{6}{x}$  ولتنعيم مربع الطرف الاول  
يضاف اكل من طرفيها مربع نصف  $\frac{5}{x}$  فيحدث

$$x^2 + \frac{5}{x} + \frac{25}{4x^2} = \frac{25}{4x^2} - \frac{6}{x}$$

وباخذ جذر كل من الطرفين يحدث

$$x + \frac{5}{2x} \pm \frac{\sqrt{25 - 48}}{4x} = \frac{5}{2x} - \frac{6}{x}$$

$$x + \frac{5}{2x} \pm \frac{\sqrt{25 - 48}}{4x} = \frac{5}{2x} - \frac{6}{x}$$

فاذا رمز لجذري المجهول  $x$  بالرمزين  $u$  و  $v$  يحدث

$$u + \frac{5}{2u} \pm \frac{\sqrt{25 - 48}}{4u} = \frac{5}{2u} - \frac{6}{u}$$

(٧٩) ولنتخير ما يؤل اليه هذان المقداران حين يفرض فيهما المكرر  $x$   
مساويا لصفري فيحدث بناء عليه

$$u + \frac{5}{2u} \pm \frac{\sqrt{25 - 48}}{4u} = \frac{5}{2u} - \frac{6}{u}$$

\*(٢٧)\*

أعني أن مقدار  $s$  يكون لانها تبا ومقدار  $s$  الذي بهذه الصورة  $s$  يدل على أنه غير معين لكن استنتاج هذا المقدار في هذه الحالة حادث من وجود مضروب مشترك لحدى الكسر

$$\frac{s - \sqrt{s^2 - 4h}}{2} \text{ ولتعيين هذا المضروب بضرب هذا الكسر في } \frac{s + \sqrt{s^2 - 4h}}{2} \text{ فيحدث}$$

$$= \frac{(s - \sqrt{s^2 - 4h})(s + \sqrt{s^2 - 4h})}{(s - \sqrt{s^2 - 4h}) \cdot 2} = \frac{s^2 - (s^2 - 4h)}{2} = \frac{4h}{2} = 2h$$

وحيث أن كلاً من حدى هذا الكسر الأخير قبل القسمة على  $2$  يكون  $2h$  هو المضروب المشترك ويحدث بعد حذفه

$$s = \frac{2h}{s - \sqrt{s^2 - 4h}}$$

فإذا فرض الآن أن  $s = 0$  ينتج

$$s = \frac{2h}{s - \sqrt{s^2 - 4h}} = \frac{2h}{s} \text{ أى } s = 2h$$

وأما مقدار  $s$  فهو لانها تبا لأنه بفرض  $s = 0$  تول المعادلة  $s^2 + s + h = 0$  الى معادلة ذات درجة اولى  $s + h = 0$  لا تحقق الا بمقدار واحد وهو  $s = -h$  وحيث ثبت ان مقدار  $s$  معين ينتج من ذلك أن مقدار  $s$  لانها تبا

\*(فى مسائل الدرجة الثانية)\*

\*(المسألة الاولى)\*

(٨٠) ما هو العدد القاسم ٣٦ بحيث يكون خارج القسمة زائدا المقسوم عليه مساويا ١٥

فالجواب

\* (١٠٧) \*

فالجواب ان يفرض ان العدد المجهول منه نفارج قسمة ٣٦ على م  
يكون هكذا  $\frac{٣٦}{م}$  فاذن تحدث هذه المعادلة  $\frac{٣٦}{م} + م = ١٥$   
ومنها يحدث  $٣٦ + م = ١٥ م$  أو  $١٥ م = ٣٦ + م$   
ومنها يحدث

$$\frac{٣٦ + م}{١} = \frac{١٤٤ - ٢٢٥ م}{١} \Rightarrow \frac{٣٦ + م}{١} = ١٤٤ - ٢٢٥ م$$

فاذن يكون مقدار م هكذا

$$م = \frac{٣٦ + م}{١} = ١٤٤ - ٢٢٥ م$$

فكل من مقداري م = ١٢ و م = ٣ يحقق منطوق المسئلة

\* (المسئلة الثانية) \*

(٨١) اذا كان المطلوب تقسيم ح الى جزئين يكون احدهما وسطا هندسيا بين ح الكلى والجزء الاخر يقال  
لحل ذلك يرمز بالحرف م الجزء ح الذى يكون وسطا متناسبا فيكون  
الجزء الاخر مساويا ح - م فاذن يكون

$$ح : م :: م : ح - م$$

$$م = ح - م$$

أو

$$م + م = ح - م$$

ومنها يحدث

$$\frac{٢م}{١} = \frac{ح - م}{١} \Rightarrow ٢م = ح - م$$

فاذن يكون مقدار م هكذا

$$م = \frac{ح - م}{٢}$$

$$م = \frac{ح - م}{٢}$$

نقدار م يليق بمنطوق المسئلة وأما مقدار م فغير لائق به لانه مقدار



\* (١٠٨) \*

سألب فيقطع النظر عنه فينتهز يكون للمسئلة حل واحد هو

$$\frac{(57+1) \div 2}{2} = 15$$

\* (تنبيهان) \*

الاول مقدار س =  $\frac{(57+1) \div 2}{2}$  يكون أصم مهما كان  
لان اجراء عملية الحساب على عدد مخصوص لا يوصل الى مقدار صحيح  
للمجهول س

الثاني قد استخرج فيما تقدم من المعادلة ذات الدرجة الثانية الجدران

$$\frac{(57+1) \div 2}{2} = 15 \text{ و } \frac{(57+1) \div 2}{2} = 15$$

الاذان يكون كل منهما محققا للمعادلة غير أن أحدهما يليق بمنطوق المسئلة  
المقروضة ويؤخذ من ذلك أن هذه المعادلة كناية عن مسئلة تكون المسئلة التي  
حلت سابقا حالة خصوصية منها ومنطوقها هكذا

المطلوب إيجاد عددين حاصل جمعهما مساو ٥٧ واحدتهما وسط هندسي  
بين الآخر و ١

فإذا رمز بالحرف س لأحد العددين المجهولين الذي هو كناية عن الوسط  
الهندسي توصل الى هذه المعادلة

$$س + س - ١ = ٥٧$$

التي جذورها السألب يكون موافقا لمنطوق المسئلة بجذورها الموجب

\* (المسئلة الثالثة) \*

(٨٢) المطلوب كناية عدد ٣١٧ في جملة تعدادية بحيث تكون أرقامه

٦ و ٣ و ٢

فيغرض أن س رمز للأساس المجهول للجملة فالسنة آحاد من الرتبة

الثالثة للعدد المفروض تكافى ٦ س والثلاثة آحاد من الرتبة الثانية

تكافى ٣ س فالعدد المعلوم يكافى

٦ س

(١٠٥)

$$6x^2 + 3x + 2 = 317 \text{ أو}$$

$$6x^2 + 3x + 2 = 317 \text{ أو}$$

$$6x^2 + 3x + 2 = 315 \text{ أو}$$

$$6x^2 + 3x + 2 = \frac{100}{4} = 25 \text{ ومنها يستخرج}$$

$$6x^2 + 3x + 2 = \frac{100}{4} = 25 \text{ ومنها يستخرج}$$

ومقدارا  $x$  يكونان

$$x = \frac{29 \pm 1}{4} = \frac{30}{4} = 7.5 \text{ و } x = \frac{28}{4} = 7$$

فيقطع النظر عن المقدار  $x = 7.5$  لان اساس الجملة التعدادية لا يكون سالبا ولا يوافق المسئلة فاذن يكتفى بجذورها الموجب

\*(المسئلة الرابعة)\*

(٨٣) اذا كان المطلوب تقسيم العدد ١٠ الى جزئين حاصل ضربهما يساوي ٢٨ فالجواب أن يقال

لحل هذه المسئلة نضع على هيئة معادلة كالعادة لكن نذكر أن حاصل جمع جذري معادلة ذات درجة ثانية يكون مساويا لمكرر الحد الثاني بعلامة مخالفة لعلامته وأن حاصل ضربهما يساوي للحد المعلوم يكون العددان المطلوبان جذري معادلة ذات درجة ثانية مكر رحد الثاني مساو - ١٠ والحد المعلوم مساو ٢٨ فتكون المعادلة هكذا

$$x^2 - 10x + 28 = 0$$

فجذرا هذه المعادلة يكونان تخيليين لان الحد المعلوم موجب واكبر من مربع نصف ١٠ فحينئذ تكون المسئلة المفروضة غير ممكنة الحل ولما نقشة هذه المسئلة بطريقة عامة وبيان احوالها الممكنة وغير الممكنة

## المسألة الأولى

يفرض أن  $\sqrt{m}$  وهو العدد الذي يراد تقسيمه وان  $m$  رمز الحاصل ضرب  
جزءيه فيكون العددان المجهولان مبينين بجذري المعادلة

$$m^2 = m + m^2$$

التي يستخرج منها  $m = \sqrt{m} + \sqrt{m - \frac{m}{2}}$  و  $m = \sqrt{m} - \sqrt{m - \frac{m}{2}}$

فاذا كان  $m < \frac{m}{2}$  كان هذان المقدران تخيليين فحينئذ تكون المسئلة غير  
ممكنة الحل

واذا كان  $m = \frac{m}{2}$  كان هذان الجذران حقيقيين وكل منهما مساويا  $\frac{m}{2}$   
أعني أن عدد  $\sqrt{m}$  يكون مقسوما في هذه الحالة قسمين متساويين

واذا كان  $m > \frac{m}{2}$  كان هذان المقداران حقيقيين غير متساويين ويصغر

الفرق بينهما المساوي  $\sqrt{m - \frac{m}{2}}$  كلما كبر مقدار  $m$  وينتج من ذلك  
نتائج هي

انه متى قسم العدد الى قسمين مختلفين وضربا في بعضهما كان حاصل الضرب  
اكبر من العدد المذكور حين يكون الفرق بين الجزئين المختلفين قليلا ويكون  
هذا الحاصل اكبر ما يكون متى كان الجزآن المختلفان متساويين اعني متى  
انقسم العدد المذكور الى قسمين متساويين

### \* (المسألة الخامسة) \*

(٨٤) ضوآن موضوعان أحدهما في النقطة  $a$  والاخر في  $b$   
ومر موز البعد  $ab$  الكائن بينهما بالحرف  $d$  ولشدة الضوء  $a$  بالحرف  
 $m$  ولشدة الاخر الكائن في  $b$  بالحرف  $n$  والمطلوب تعيين النقطة  
الكائنة على المستقيم  $ab$  التي فيها نور الضوئين واحد وحيث فرضنا  
 $m$  و  $n$  رمزين لشدة الضوئين بالنسبة لوحدة البعد ذكر ايضا قاعدة  
معلومة هي أن شدة ضوء واحد واقع في نقطتين على ابعاد غير متساوية

تكونان



يستخرج من اول الامر جذر طرفيها فيجد

$$\begin{aligned} \frac{\overline{m}^2 \pm \overline{p}^2}{\overline{m}^2} &= \frac{\overline{m}^2}{\overline{m}^2} \text{ أو } \frac{\overline{m}^2 \pm \overline{p}^2}{\overline{m}^2} = \frac{\overline{m}^2}{\overline{m}^2} \\ \overline{m}^2 - \overline{m}^2 \pm \overline{p}^2 &= \overline{m}^2 \pm \overline{p}^2 \text{ أو } (\overline{m}^2 \pm \overline{p}^2) = \overline{m}^2 \pm \overline{p}^2 \\ \frac{\overline{m}^2}{\overline{m}^2 \pm \overline{p}^2} &= \overline{m}^2 \end{aligned}$$

فاذا استخرج منها مقدارا  $\overline{m}$  يكونان بهذه الكيفية

$$(2) \dots\dots\dots \begin{cases} \frac{\overline{m}^2}{\overline{m}^2 + \overline{p}^2} = \overline{m}^2 \\ \frac{\overline{m}^2}{\overline{m}^2 - \overline{p}^2} = \overline{m}^2 \end{cases} \text{ و}$$

ويسهل حساب البعد  $\overline{m}$  أعني  $\overline{m}$  بان يقال

$$\overline{m}^2 - \overline{m}^2 \pm \overline{p}^2 = \overline{m}^2 \pm \overline{p}^2 \text{ أو } \frac{\overline{m}^2 \pm \overline{p}^2}{\overline{m}^2 \pm \overline{p}^2} = \frac{\overline{m}^2 \pm \overline{p}^2}{\overline{m}^2 \pm \overline{p}^2}$$

ولتعيين مقداري  $\overline{m}$  و  $\overline{m}$  نؤخذ العلامتان العلويتان أو السفليتان فاذن يكون

$$\overline{m}^2 - \overline{m}^2 = \overline{m}^2 \text{ و } \frac{\overline{m}^2}{\overline{m}^2 + \overline{p}^2} = \overline{m}^2 \text{ و } \frac{\overline{m}^2}{\overline{m}^2 - \overline{p}^2} = \overline{m}^2$$

وتكون بجلنا مقداري مجهولي  $\overline{m}$  و  $\overline{m}$  هكذا

$$\begin{aligned} \frac{\overline{m}^2}{\overline{m}^2 + \overline{p}^2} &= \overline{m}^2 \text{ و } \frac{\overline{m}^2}{\overline{m}^2 - \overline{p}^2} = \overline{m}^2 \\ \overline{m}^2 - \overline{m}^2 &= \overline{m}^2 \text{ و } \frac{\overline{m}^2}{\overline{m}^2 + \overline{p}^2} = \overline{m}^2 \end{aligned}$$

\*(تنبية)\*

صورة مقداري  $\overline{m}$  و  $\overline{m}$  المبينين بمعادلتى (٢) ليست كصورة

مقداري (١) الحادثين من الحل الاول ومع ذلك فهذان المقداران عينا

الأولین وبرهان ذلك ان یغیر فی بسط سہ =  $\frac{(م + ٢م) م}{٢م - م}$  المقدار م  
بالمقدار  $٢م \times م$  ثم یوضع  $٢م$  مضروباً بمشترکاً فیقول الى  
سہ =  $\frac{٢م(م + ٢م) م}{٢م - م}$

فاذا اعتبر مقداراً م و  $٢م$  مربعی مقدارى  $٢م$  و  $٢م$  یكون المقام  
مكوناً من فاضل مربعین فاذن یكون

$$سہ = \frac{٢م(م + ٢م) م}{(٢م - م)(٢م + م)} = \frac{٢م م}{٢م - م}$$

وهو مقدار مساو لمقدار سہ المستخرج بالحل الثانى ومثل هذا یقال  
فی اثبات تساوى المقدارين الاخيرین

\*(مناقشات)\*

الاولى اذا فرض ان  $م < ٢م$  یكون مقدار سہ =  $\frac{٢م م}{٢م + م}$   
موجباً واكبر من  $\frac{٢}{٣}$  لان المقام  $٢م + م$  اصغر من  $٢م$   
لان  $م < ٢م$  فاذن یكون الکسر  $\frac{٢م م}{٢م + م}$  اكبر من الکسر  
 $\frac{٢م م}{٢م}$  اومن  $\frac{٢}{٣}$  ویكون مقدار سہ =  $\frac{٢م م}{٢م + م}$  المطابق لمقدار سہ  
موجباً ایضاً غیر انه اصغر من  $\frac{٢}{٣}$  فاذن توجد نقطة كنقطة د مستنيرة  
بنور واحد من الضوئین ا و ب وتكون اقرب الى ب من ا وهذا  
یوافق فرض  $م < ٢م$

ومقدار سہ =  $\frac{٢م م}{٢م - م}$  یكون موجباً ایضاً حیث ان  $م < ٢م$   
ویكون اكبر من سہ لان المقام  $٢م - م$  اصغر من  $٢م$  فاذن  
یكون الکسر  $\frac{٢م م}{٢م - م}$  اكبر من  $\frac{٢م م}{٢م}$  اومن سہ ومقدار

د - س =  $\frac{\overline{د} - \overline{س}}{\overline{د} - \overline{س}}$  المطابق للاول يكون سالبالان بسطه سالب

ومقامه موجب أو يقال حيث أن س أكبر من د يكون د - س = س - د

بالضرورة سالبا فاذن يوجد على المستقيم ا - نقطة ثانية ح مستتيرة بنور واحد من الضوئين المفروضين وتكون على يمين النقطة س لان بعدها

عن ا أكبر من د وهذا الناتج يوافق ايضا م < د

الثانية اذا فرض أن م > د يكون مقدار س =  $\frac{\overline{د} - \overline{م}}{\overline{د} + \overline{م}}$

موجبا غير انه بواسطة برهان كالتقدم في الحالة السابقة يبرهن على أن س

يكون أصغر من  $\frac{د}{م}$  وان المقدار المطابق له وهو د - س =  $\frac{\overline{د} - \overline{م}}{\overline{د} + \overline{م}}$

موجبا واكبر من  $\frac{د}{م}$  فاذن تكون النقطة الاولى مستتيرة بنور واحد من الضوئين الموضوعين في النقطتين ا و س واقرب الى النقطة ا من

س وهذا يوافق فرض م > د

$$\frac{\overline{د} - \overline{م}}{\overline{د} + \overline{م}}$$

والمقدار الثاني وهو س =  $\frac{\overline{د} - \overline{م}}{\overline{د} - \overline{م}}$  يكون سالبالان بسطه

موجب ومقامه سالب وتوضح هذا المقدار كما في النوع الثاني من (بند ٤٧) يغير في المعادلة

$$\frac{\overline{د} - \overline{م}}{\overline{د} - \overline{م}} = \frac{\overline{د} - \overline{م}}{\overline{د} - \overline{م}} \text{ علامة س } \text{ فتؤول الى } \frac{\overline{د} - \overline{م}}{\overline{د} - \overline{م}} = \frac{\overline{د} - \overline{م}}{\overline{د} - \overline{م}} \text{ لانه}$$

بالعنوان عن هذه المعادلة يتوصل الى منطوق المسئلة المفروضة بدون تغيير غير ان هذه المعادلة يعلم منها ان النقطة المستتيرة بنور واحد من الضوئين يكون

بعدها عن النقطة س أكبر من د فحينئذ تكون النقطة الثانية ح

المستتيرة

المستقيمة بنور واحد من الضوئين على يسار النقطة  $\alpha$  وبعدها عنها ميّناً  
 بمقدار سالب هو  $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{d}}$  لأن جذري المعادلة المغيّرة عين  
 جذري المعادلة المفروضة وأما المقدار المطابق لمقدار  $m$   $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{d}} = m$   
 وهو

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{d}} = m - d \quad \text{فيمكن وضعه بهذه الصورة}$$

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{d}} = m - d$$

وحيث نسهل البرهنة على أنه موجب واكبر من  $d$  وهذا الناتج يوافق  
 وضع النقطة  $\beta$  المعين سابقاً وفرض  $m > d$   
 الثالثة إذا فرض أن  $m = d$  كان مقدارا

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{d}} = m - d \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{d}} = m - d \quad \text{موجبين}$$

ومساوياً كل منهما  $\frac{d}{m}$  وكانت النقطة الأولى المستقيمة بنور واحد من  
 الضوئين على بعدين متساويين من النقطتين  $\alpha$  و  $\beta$  وهذا الناتج يوافق  
 فرض  $m = d$

وأما المقداران الآخران اللذان هما

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{d}} = m - d \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{d}} = m - d \quad \text{فيؤلفان إلى}$$

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{d}} = m - d \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{d}} = m - d \quad \text{وهما مقداران}$$

لأنها تبين

(انظر المناقشة الثالثة من بند ٤٥) وحيث تكون النقطة المستقيمة بنور  
 واحد من الضوئين على بعد لانهاى من النقطتين  $\alpha$  و  $\beta$  اعنى لا وجود لها  
 لان فرض  $m = d$  لا ينتج نقطة اخرى مستقيمة بنور واحد على المستقيم



١- لاعلى يمين نقطة م ولاعلى شمال نقطة ا  
الرابعة اذا فرض ان م = ك و و = ٠ فى آن واحذال مقدارا

$$\frac{\overline{و\gamma م}}{\overline{و\gamma + م\gamma}} = م - و = م - \frac{\overline{و\gamma}}{\overline{و\gamma + م\gamma}} \text{ الى}$$

$$\frac{\overline{و\gamma م}}{\overline{و\gamma + م\gamma}} = \frac{\overline{و\gamma م}}{\overline{و\gamma + م\gamma}}$$

فالحل الاول للمسئلة هو النقطة التى وضع فيها الضوان واما المقداران  
الاخران اللذان هما

$$\frac{\overline{و\gamma م}}{\overline{و\gamma + م\gamma}} = م - و = م - \frac{\overline{و\gamma}}{\overline{و\gamma + م\gamma}}$$

فيؤلان الى م اعنى انهما غير معينين وحينئذ تكون جميع نقط المستقيم  
١- المار بالنقطة الموضوع فيها الضوان مستتيرة بنور واحد من الضوئين  
وهذا الناتج موافق لما فرضناه من ان الضوئين فى نقطة واحدة وان  
شدتهما واحدة

(فى المعادلات التى يمكن حلها بواسطة المعادلات ذات الدرجة الثانية)  
(٨٥) فحل المعادلات ذات الدرجة الثالثة الخالية عن الحد المعلوم  
بواسطة المعادلات ذات الدرجة الثانية فحل المعادلة العمومية

$$م^٣ + ح م^٢ + ك م + ٠ = ٠$$

بوضع م مضر وبامشتركا فيها فتؤول الى المعادلة

$$م (م^٢ + ح م + ك) = ٠$$

وحيث أن طرفها الاول المحتوى على حاصل ضرب مضروبين مساو للطرف  
الثانى اى الصفر يكفى لتحققها فرض احد المضروبين مساويا لصفر وحينئذ  
تكون المعادلة متحققة بفرض م = ٠ أو

$$م^٢ + ح م + ك = ٠ \text{ الذى يحدث منه}$$

$$\frac{\overline{م - \frac{ح}{٢}}}{\overline{م - \frac{ح}{٢}}} = م - \frac{ح}{٢} = م - \frac{ح}{٢} \text{ و } \frac{\overline{م - \frac{ح}{٢}}}{\overline{م - \frac{ح}{٢}}} = م - \frac{ح}{٢}$$

وبالجملة

وبالجملة فيكون المجهول سه ثلاثة مقادير هي

$$\text{سه} = -\frac{ع}{٢} + \left[ \frac{ع}{٢} - ك + \sqrt{\frac{ع^2}{٤} - ك^2} \right] \text{ و } \text{سه} = -\frac{ع}{٢} - \left[ \frac{ع}{٢} - ك + \sqrt{\frac{ع^2}{٤} - ك^2} \right]$$

ويمكن حل المعادلة  $\text{سه} + ع + ك = \text{سه} + ك + \text{سه} = ٠$  ذات الدرجة الرابعة غير المحتوية على الحد المعلوم والحد المجهول بدرجة أولى بحل تطير المتقدم

(٨٦) المعادلة المضاعفة التربيع معادلة لا تحتوى الاعلى الجاهيل بدرجات مزدوجة وتحل المعادلة المضاعفة التربيع ذات الدرجة الرابعة بواسطة حل المعادلة ذات الدرجة الثانية فحل المعادلة العمومية

$$\text{سه} + ع + ك = ٠$$

يجعل  $\text{سه} = ص$  ومنه يستخرج  $\text{سه} = \pm \sqrt{ص}$  ثم يوضع في المعادلة المفروضة بدل سه مقداره فتؤول الى

$$ص + ع + ك = ٠$$

ومنها يحدث

$$ص = -\frac{ع}{٢} \pm \left[ \frac{ع}{٢} - ك + \sqrt{\frac{ع^2}{٤} - ك^2} \right]$$

واذا وضع على التعاقب بدل ص مقداره في  $\text{سه} = \pm \sqrt{ص}$

$$\text{حدث سه} = \pm \sqrt{-\frac{ع}{٢} \pm \left[ \frac{ع}{٢} - ك + \sqrt{\frac{ع^2}{٤} - ك^2} \right]} \text{ و } \text{سه} = \pm \sqrt{-\frac{ع}{٢} \mp \left[ \frac{ع}{٢} - ك + \sqrt{\frac{ع^2}{٤} - ك^2} \right]}$$

فاذن يكون المجهول سه أربعة مقادير هي

$$\text{سه} = \sqrt{-\frac{ع}{٢} \pm \left[ \frac{ع}{٢} - ك + \sqrt{\frac{ع^2}{٤} - ك^2} \right]} \text{ و } \text{سه} = -\sqrt{-\frac{ع}{٢} \pm \left[ \frac{ع}{٢} - ك + \sqrt{\frac{ع^2}{٤} - ك^2} \right]}$$

$$\text{سه} = \sqrt{-\frac{ع}{٢} \mp \left[ \frac{ع}{٢} - ك + \sqrt{\frac{ع^2}{٤} - ك^2} \right]} \text{ و } \text{سه} = -\sqrt{-\frac{ع}{٢} \mp \left[ \frac{ع}{٢} - ك + \sqrt{\frac{ع^2}{٤} - ك^2} \right]}$$

\*(مناقشات)\*

(٨٧) قد حولت المعادلة المفروضة الى معادلة بهذه الصورة

$$صه + حه + كه = ٠$$

بفرض  $صه = حه = كه$  أي  $صه = حه = كه$

وينتج من الارتباط الأخير أن كل مقدار فرض للجهول  $صه$  يحدث مقدارين متساويين ومتخالفين العلامة للجهول  $صه$  ومن المعلوم أن مجهول  $صه$  من كل معادلة كمعادلة

$$صه + حه + كه = ٠$$
 له مقداران

فأذن يكون للجهول  $صه$  أربعة مقادير متساوية متخالفين ومتخالفة العلامة فينتد يقال

كل معادلة مضاعفة التربع ذات درجة رابعة لها أربعة جذور متساوية متخالفين في العلامة

ولنختبر الأحوال التي فيها هذه الجذور حقيقية أو تخيلية فنقول حيث أن  $صه = حه = كه$  ينتج بالبداية أنه إذا كان جذرا  $صه$  موجبين تكون جذور مجهول  $صه$  الأربعة حقيقية وإذا كان أحد جذري  $صه$  موجبا والاخر سالبا يكون جذران من الأربعة حقيقيين والاخران تخيليين

وإذا كان جذرا  $صه$  سالبين تكون جذور  $صه$  الأربعة تخيلية وإذا كان جذرا  $صه$  تخيليين تكون جذور مجهول  $صه$  الأربعة كذلك وحيث علم مما تقدم كيفية استنتاج مقادير  $ح$  و  $ك$  و علامتهما وفي الأحوال يكون مقادير  $صه$  حقيقيين أو تخيليين موجبين أو سالبين يسهل حينئذ معرفة جذور  $صه$  هل هي حقيقية أو تخيلية في جميع الفروضات الممكنة

\* (وهالك جداولاً يحتوي على جميع الاحوال التي يمكن بيانها) \*

اذا كان	وكان	يكون	صحة	و	صحة	حقيقيين وموجبين	.....	و	صحة	و	صحة	حقيقته
اذا كان	وكان	يكون	صحة	و	صحة	حقيقيين وسالبين	.....	ويكون	صحة	و	صحة	تخليه
اذا كان	وكان	يكون	صحة	و	صحة	تخليين	.....	ويكون	صحة	و	صحة	تخليه
اذا كان	وكان	يكون	صحة	و	صحة	حقيقيين ومختالفين العلامة	ويكون		صحة	و	صحة	حقيقيين
									صحة	و	صحة	تخليين

يكن منافية إلا حوالا انحصوصية التي يكون فيها كل من ع و ل مساويا لغير في آن واحد أو على التعاقب والمطالبة التي يكون فيها ل = ع فيقال

إذا كان  $\left\{ \begin{matrix} \text{ل} = \text{ع} \\ \text{ع} \neq \text{ع} \end{matrix} \right\}$  يكون ص = و  $\left\{ \begin{matrix} \text{ع} - \text{ع} = \text{و} \\ \text{و} = \text{و} \end{matrix} \right\}$  ويكون  $\left\{ \begin{matrix} \text{ع} - \text{و} = \text{ل} \\ \text{و} = \text{و} \end{matrix} \right\}$  حقيقيين إذا كان ع > ع

إذا كان  $\left\{ \begin{matrix} \text{ل} \neq \text{ع} \\ \text{ع} = \text{ع} \end{matrix} \right\}$  يكون ص = و  $\left\{ \begin{matrix} \text{ع} - \text{و} = \text{ل} \\ \text{و} = \text{و} \end{matrix} \right\}$  ويكون  $\left\{ \begin{matrix} \text{ع} - \text{ل} = \text{و} \\ \text{و} = \text{و} \end{matrix} \right\}$  حقيقيين إذا كان ل > ع

وإذا كان  $\left\{ \begin{matrix} \text{ل} = \text{ع} \\ \text{ع} = \text{ع} \end{matrix} \right\}$  يكون ص = و  $\left\{ \begin{matrix} \text{ع} - \text{و} = \text{ل} \\ \text{و} = \text{و} \end{matrix} \right\}$  ويكون  $\left\{ \begin{matrix} \text{ع} - \text{ل} = \text{و} \\ \text{و} = \text{و} \end{matrix} \right\}$

وإذا كان  $\left\{ \begin{matrix} \text{ل} = \text{ع} \\ \text{ع} \neq \text{ع} \end{matrix} \right\}$  يكون ص = و  $\left\{ \begin{matrix} \text{ع} - \text{و} = \text{ل} \\ \text{و} = \text{و} \end{matrix} \right\}$  ويكون  $\left\{ \begin{matrix} \text{ع} - \text{ل} = \text{و} \\ \text{و} = \text{و} \end{matrix} \right\}$  حقيقيين إذا كان ع > ع

وتكون الجذور الأربعة حقيقة متساوية ومتخالفات

\* (١٢١) \*

(٨٨) ولنطبق هذه المباحث العمومية على بعض مسائل خصوصية فنقول

\* (المثال الاول) \*

اذا فرضت المعادلة  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$  وجعل فيها  $y = x^2$  توصل الى

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

نجد ان  $y$  يكونان حقيقيين غير متساويين ومتحدى العلامة وموجبين اما الاول فلان الحد المعلوم موجب واقل من مربع نصف مكرر الحد الثانى واما الثانى فلان الحد المعلوم موجب واما الثالث فلان مكرر الحد الثانى سالب فاذن تكون جذور المجهول  $x$  الاربعة حقيقية ويتحقق هذا باجراء الحساب وذلك بأن يستخرج من المعادلة ذات الدرجة الثانية المتقدمة

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \quad \left( \frac{13 \pm 5}{2} = y \right)$$

وينتج من ذلك

$$y = \frac{13 + 5}{2} = 9 \quad \text{و} \quad y = \frac{13 - 5}{2} = 4 \quad \text{فاذن يكون}$$

$$x^2 = 9 \quad \text{و} \quad x^2 = 4 \quad \text{فاذن يكون}$$

\* (المثال الثانى) \*

اذا فرضت المعادلة  $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$  وجعل فيها

$$y = x^2$$

$$y^2 + 3y + 2 = 0$$

نجد ان هذه المعادلة يكونان حقيقيين غير متساويين ومتحدى العلامة وسالبين اما الاول والثانى فيبرهن عليهما بمثل ما تقدم فى المعادلة السابقة واما الثالث

\* (٣١) \*

• (١٤٢) • -

فلان ~~مكرر~~ الحد الثاني موجب فاذن تكون الجذور الاربعة للمعادلة  
المضاعفة التربيع تخيلية لان مقدارى  $v$  يكونان

$$v = 1 \text{ و } v = 2$$

$$x \pm \sqrt{1-v} = s \text{ و } x \pm \sqrt{2-v} = s$$

\*(المثال الثالث)\*

اذا فرضت المعادلة  $s^2 - s - 1 = 0$  ثم جعل فيها  
 $s = v$  قول الى

$$v^2 - v - 1 = 0$$

وحيث ان الحد المعلوم لهذه المعادلة سالب يكون جذرا  $v$  حقيقيين  
ومتخالفين فى العلامة ويكون اثنان من الجذور الاربعة للمعادلة المضاعفة  
التربيع حقيقيين واثنان تخيليين ويتحقق ذلك من البحث عن مقدارى  
 $v$  ومقادير  $s$  فيحدث

$$v = 3 \text{ و } v = 2$$

وبناء عليه يحدث

$$x \pm \sqrt{3-v} = s \text{ و } x \pm \sqrt{2-v} = s$$

\*(المثال الرابع)\*

اذا فرضت المعادلة  $s^2 - s - 3 = 0$  وجعل فيها  
 $s = v$  وقسمت جميع حدودها على  $v$  تؤل الى

$$v = \frac{3}{v} + 1$$

وحيث أن الحد المعلوم لهذه المعادلة موجب واكبر من مربع نصف مكرن  
الحد الثانى يكون جذرا  $v$  تخيليين فاذن تكون جذور  $s$  كذلك

لأنه ينحصل

$$\frac{11 - \gamma + \gamma}{10} = \text{صه} \quad \text{و} \quad \frac{11 - \gamma - \gamma}{10} = \text{صه} \quad \text{وبناء عليه يحدث}$$

$$\frac{11 - \gamma + \gamma}{10} \left| \pm = \text{سه} \quad \text{و} \quad \frac{11 - \gamma - \gamma}{10} \left| \pm = \text{سه}$$

(٨٩) لحل معادلتين ذاتي مجهولين ودرجة ثانية يحذف اولا احدا المجهولين  
بأحدى الطرق المعلومة المقررة في حل المعادلات ذات الدرجة الاولى كما في  
(بند ٣٦)

فاذا كان المطلوب حل المعادلتين

$$\text{سه} + \text{صه} = \text{د}$$

$$\text{سه} + \text{صه} = \text{د}$$

يستخرج من المعادلة الثانية مقدار المجهول صه ويوضع في الاولى فيحدث  
على التوالى

$$\text{سه} + (\text{سه} - \text{د}) = \text{د} \quad \text{أو}$$

$$\text{سه} + \text{د} + \text{د} - \text{سه} = \text{د} \quad \text{أو}$$

$$\text{سه} - \text{د} = \text{د} - \text{د} + \text{د} = \text{د} \quad \text{أو}$$

$$\text{سه} - \text{د} = \text{د} + \text{سه} - \text{د} = \text{د} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\frac{11 - \gamma \pm \gamma}{10} = \text{سه}$$

واذا وضع بدل سه مقداره في معادلة صه = د - سه تؤل الى

$$\frac{11 - \gamma \pm \gamma}{10} = \text{صه}$$

فحينئذ المعادلتان المفروضتان تكونان متحققتين بكل من مقدارى سه  
ومقدارى صه غير انه يلزم اخذ علامتين العلويتين أو السفليتين لكل  
من المقدارين المأخوذين من مقدارى صه ومقدارى سه



ولنبه ايضا على ان مقدارى صه يكونان عين مقدارى سه لان  
المعادلتين المفروضتين لا تتغيران متى غير فيهما المجهول سه بالمجهول صه  
والمجهول صه بالمجهول سه فاذا عين مقدارا سه قبل التغيير كانا  
عين مقدارى صه المستخرجتين بعد التغيير

(٩٠) اذا كان المطلوب حل المعادلتين سه + صه = حه

و سه = صه = د فلذلك حلان

الحل الاول ان يستخرج من المعادلة الثانية مقدار صه فيكون  
صه =  $\frac{د}{٢}$  ثم يوضع هذا المقدار في المعادلة الاولى فيحدث على التوالي

$$سه + \frac{د}{٢} = \frac{د}{٢} + \frac{د}{٢} \text{ أو}$$

$$سه + سه = \frac{د}{٢} + \frac{د}{٢} \text{ أو}$$

$$سه - سه = \frac{د}{٢} + سه - سه \text{ ومنها يحدث}$$

$$سه = \frac{\frac{د}{٢} + سه}{٢} = \frac{\frac{د}{٢} + سه}{٢}$$

ولا استخراج مقدارى صه يوضع في المعادلة صه =  $\frac{د}{٢}$  بدل سه

المقدار المضاعف  $\frac{\frac{د}{٢} + سه}{٢}$  ثم يوضع ايضا المقدار المضاعف

$\frac{\frac{د}{٢} - سه}{٢}$  بدل سه ويختصر فيحدث لمجهول صه مقدار

$$سه = \frac{\frac{د}{٢} + سه}{٢}$$

وتتحقق المعادلتان المفروضتان ببجالة مقادير سه الاربعة وبجالة مقادير  
صه الاربعة وتستنتج هاتان الجملتان بتعشيق علامات مقدار سه باربعة

\*(١٢٥)\*

طرق مختلفة ثم تؤخذ العلامات المطابقة لها من مقادير صـ فينتد تكون مقادير صـ عين مقادير صـ وهذا الشيء من كون المجزولين داخلين بكيفية واحدة في المعادلتين المفروضتين

\*(تنبيه)\*

لا يمكن تحويل مقدار صـ =  $\pm \sqrt{\frac{\frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9}}{\frac{4}{5} - \frac{4}{7}}}$  الى

هذه الصورة صـ =  $\sqrt{\frac{4}{5} + \frac{4}{7}}$  و يجب أن يكون  $\frac{4}{5} - \frac{4}{7}$  مربعاً

كاملاً كما في (بند ٦٦) ومن المثال المفروض ينتج  $\frac{4}{5} = \frac{4}{7}$  او

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{7} \text{ و } \frac{4}{5} - \frac{4}{7} = \frac{4}{4} \text{ فاذن يكون}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{4}{7} = \frac{4}{4} \text{ أي أن } \frac{4}{5} - \frac{4}{7} = \frac{4}{4} \text{ مربع كامل فاذن}$$

يمكن تحويل المقدار المفروض الى مقدار آخر بهذه الصورة  $\sqrt{\frac{4}{5} + \frac{4}{7}}$

وحيث علم من (بند ٦٦) بعد الرمز الى  $\frac{4}{5} - \frac{4}{7}$  بالحرف هـ أن

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{7} \text{ و } \frac{4}{5} - \frac{4}{7} = \frac{4}{4} \text{ وتقدم أن } \frac{4}{5} = \frac{4}{7} \text{ و هـ}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{4}{7}} \text{ يكون } \frac{4}{5} = \frac{4}{7} \text{ و } \frac{4}{5} - \frac{4}{7} = \frac{4}{4} \text{ وبالجمله}$$

فيكون

$$\sqrt{\frac{4}{5} - \frac{4}{7}} \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{4}{7}} = \pm \sqrt{\frac{4}{5} - \frac{4}{7}} \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{4}{7}} \text{ او } \sqrt{\frac{4}{5} - \frac{4}{7}} \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{4}{7}} = \pm \sqrt{\frac{4}{5} - \frac{4}{7}} \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{4}{7}}$$

\*(٣٢)\*

\*(١٢٣)\*

وبإجراء عمل مشابه لذلك يحدث

$$\sqrt{\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r}} \pm \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

\*(الحل الثاني)\*

ان يستنتج المقداران الاخيران من اول وهله بطريقة أخصر من الطريقة

المستعملة في حل المعادلتين المقروضتين اللتين هما  $\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

و  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$  وذلك بان يجمع طرفا الى طرف مع ملاحظة

أن الطرف الاول الناتج يكون مربعا كاملا للكمية ذات الحدين  $\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r}$

فيحدث  $(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}) = \frac{1}{r}$  ومنها يستخرج

$$\sqrt{\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r}} = \frac{1}{r}$$

ثم تطرح المعادلة الثانية من الاولى فيحدث

$(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}) = \frac{1}{r}$  ومنها ينتج

$$\sqrt{\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r}} = \frac{1}{r}$$

وحيث علم بمجموع المجهولين  $\frac{1}{r}$  و  $\frac{1}{r}$  وفاضلهما يستخرج كل منهما

بواسطة القاعدة المقررة في (بند ٣) فيكونان

$$\sqrt{\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r}} \pm \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

$$\sqrt{\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r}} \pm \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

(٩١) متى احتوت معادلة ذات مجهول واحد على علامة جذر تربيعي

مشتغل على المجهول المذكور أو على علامات جذور كذلك فلها يلزم أولا

حذف العلامة او العلامات كما في الامثلة الآتية

\*(المثال الاول)\*

اذا كان المطلوب حل هذه المعادلة

\*(١٢٧)\*

$$٢ + \sqrt{٢٥} = ٣$$

يحول ٢ الى الطرف الاول بحيث يكون الطرف الثاني محتويا على علامة الجذر فقط ثم يرفع كل من الطرفين الى الدرجة الثانية ويختصر الناتج فيحدث

$$(٣ - ٢)^2 = (\sqrt{٢٥})^2 \text{ أو } ١ = ٢٥$$

$$٩ - ٦\sqrt{٢٥} + ٤ = ٢٥ \text{ أو } ١٣ - ٦\sqrt{٢٥} = ٢٥$$

$$٩ - ٦\sqrt{٢٥} = ٢٥ \text{ أو } -٦\sqrt{٢٥} = ١٦$$

$$\sqrt{٢٥} = -\frac{٨}{٣} \text{ ومنها يحدث}$$

$$\frac{١٢٢٥ \sqrt{٢٥} \pm ٣٧}{١٨} = \frac{٣٦ \times ٤ - ٣٧}{١٨} \sqrt{٢٥} \pm \frac{٣٧}{١٨} = \frac{٤}{٩} \left( \frac{٣٧}{١٨} \right) \left( \pm \frac{٣٧}{١٨} \right)$$

$$\frac{٣٥ \pm ٣٧}{١٨} = \text{فاذن يكون}$$

$\frac{١}{٩} = \frac{٢}{١٨} = \frac{٣٥ - ٣٧}{١٨} = \sqrt{٢٥}$  و  $\frac{٧٢}{١٨} = \frac{٣٥ + ٣٧}{١٨} = \sqrt{٢٥}$   
ولتحقيق هذين المقدارين يوضع في المعادلة ٣ - ٢ = ٢٥  
بدل ٣ مقدار ٤ فيحدث

$$١٢ - ١٠ = ٢ \text{ أو } ٢ = ٢$$

اعني ان المقدار الاول يكون محققا للمعادلة

واذا وضع في المعادلة بعينها بدل ٣ مقدار ٤ وهو  $\frac{١}{٩}$  نؤول الى  $\frac{١}{٩} = ٢$  أو  $\frac{٥}{٩} = \frac{٥}{٩}$  وهذا ناسا وقاسديه يثبت ان مقدار

$\frac{١}{٩} = ٢$  لا يكون محققا للمعادلة ٣ - ٢ = ٢٥

ولو كان محققا للمعادلة ٩ - ٦ = ٢٥ + ٤ = ٢٥

لان بعض مقادير المجهول ٣ اذا صير طرفي المعادلة ٣ - ٢ = ٢٥

= ٢٥ متساويين ومتخالفين في العلامة بصير طرفي المعادلة

٩ منه  $- ١٢$  منه  $+ ٤ = ٢٥$  منه متساويين لان هذين الطرفين  
حادثان من تربيع طرفي المعادلة الاولى

فلايجاد المعادلة التي تحقق بمقدار  $س = \frac{1}{4}$  نغير العلامة المتلوة بعلامة  
الجذر في المعادلة  $٣ س - ٢ = ٥$   $\sqrt{س}$  وبتنول الى

$$٣ س - ٢ = ٥ \sqrt{س}$$

\*(المثال الثاني)\*

اذا كان المطلوب حل المعادلة  $\sqrt{٣ س + ١} = ٢ + \sqrt{س - ١}$   
يرفع طرفاها للدرجة الثانية فتصير

$$٣ س + ١ = ٤ + ٤ \sqrt{س - ١} + س - ١$$

وبترك علامة الجذر في الطرف الثاني واختصار الناتج يحدث

$$٢ س - ٣ = ٤ \sqrt{س - ١} \text{ او } س - ١ = ٤ \sqrt{س - ١}$$

ثم يربع الطرفان ثانيا فيحدث

$$٤ س - ١٢ = ١٦ س - ٦٤ \text{ او } ١٢ س = ٥٢$$

$$س = \frac{١٣}{٣} \text{ ومنها يحدث } ٠ = ٥$$

$$س = ٣ \pm \sqrt{٩ - ٥} = ٣ \pm ٢ = ٥ \text{ فاذن يكون}$$

$$س = ٥ = ٣ + ٢ \text{ و } س = ١ = ٣ - ٢$$

ومقدارا  $س$  و  $س$  يحققان المعادلة المفروضة

\*(المثال الثالث)\*

اذا كان المطلوب حل المعادلة  $\sqrt{٢ (س - ١)} = ٢ - \sqrt{س + ١}$

$- \sqrt{س + ١} = (٣ - س)$  فنحول علامة الجذر الثالثة الى الطرف

الثاني ثم يربع كل من الطرفين فيحدث

$$٢ س - ٢ = ٢ - ٢ (س - ١) + (س + ١) = ١ + س = ٣ س - ٢ \text{ او}$$

$$\sqrt{2} = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

ثم يربع ايضا طرفا هذه المعادلة الاخيرة فيحدث

$$2 - 2\sqrt{2} + 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2$$

$$2 - 2\sqrt{2} + 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2$$

فاذن يكون لمجهول  $\sqrt{2}$  أربعة مقادير متغايرة هي

$$\sqrt{2} = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ و } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ و } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

ولا تتحقق المعادلة المفروضة بقدرى  $\sqrt{2} = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}$  و  $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}$

(الباب الرابع)\*

(في التناسبات والمتواليات العددية والهندسية واللوغاريتم)\*

(في التناسبة العددية أى التفاضلية)\*

(٩٢) براهين خواص التناسبة المقررة في كتب علم الحساب تسهل

جدابواسطة القواعد الجبرية ويبان ذلك أن يقال

كل متناسبة عددية كالتناسب

$$a : b :: c : d$$

نوضع هكذا

$$a - b = c - d \text{ ومنها يستخرج}$$

$$a + b = c + d \text{ و } a - b = c - d$$

أعنى أن كل متناسبة عددية حاصل جمع طرفيها يساوى حاصل جمع وسطيها

وأن أحد طرفيها يساوى حاصل جمع وسطيها منقوصا منه الطرف الآخر

وأن أحد وسطيها يساوى حاصل جمع طرفيها منقوصا منه الوسط الآخر

ويستنتج من المتساوية  $a + b = c + d$  أن  $a - b = c - d$  وأعنى

إذا ساوى حاصل جمع عددين حاصل جمع آخرين تركب من هذه الأعداد  
الأربعة متناسبة عددية جزءاً أحداً الحاصلين طرفاًها وجزءاً الآخر وسطاًها  
والوسط التفاضل لعددتين يساوى نصف حاصل جمعها لأنه من المتناسبة

$$ج : د :: هـ : و \quad \text{يحدث}$$

$$ز = ج + د \quad \text{ومن هذه المتساوية ينتج}$$

$$هـ = \frac{ج + د}{٢}$$

\* (في المتناسبة الهندسية) \*

(٩٣) كل متناسبة هندسية كالمتناسبة ج : د :: هـ : و

توضع هكذا  $\frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و}$  ومن هذه المتساوية يستنتج

$$ج = د \cdot \frac{هـ}{و} \quad \text{و} \quad \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و}$$

أعني أن كل متناسبة هندسية حاصل ضرب طرفيها يساوى حاصل ضرب  
وسطيها وأن أحد طرفيها يساوى خارج قسمة حاصل ضرب وسطيها على طرفيها  
الآخر وأن أحد وسطيها يساوى خارج قسمة حاصل ضرب طرفيها على الوسط  
الآخر ويستنتج من كل متساوية كالمتساوية ج : د :: هـ : و أن  $\frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و}$   
أعني إذا ساوى حاصل ضرب عددين حاصل ضرب عددين آخرين تركب  
من هذه الأعداد الأربعة متناسبة أصلاً أحد الحاصلين طرفان لهما  
وأصلاً الحاصل الآخر وسطان لهما

ويستنتج من المتساوية ج : د :: هـ : و بناء على ما تقدم ثمان متناسبات

$$ج : د :: هـ : و \quad ج : و :: د : هـ \quad د : ج :: و : هـ \quad د : و :: هـ : ج$$

$$و : ج :: د : هـ \quad و : د :: هـ : ج \quad هـ : ج :: د : و \quad هـ : و :: ج : د$$

فيشاهد من متناسبات الصف الأول الأربعة أن الأعداد الأربعة متناسبة  
مع بعضها ية تكون منها متناسبة أيضاً بتغيير موضع الوسطين أو الطرفين  
وبشاهد أيضاً من متناسبات الصف الثاني الأربعة أن التناسب لا يتغير بتغيير  
الطرفين بالوسطين ولا الوسطين بالطرفين

والوسط الهندسي بين عددين أو كيتين يساوى جذر حاصل ضربهما لأنه من

المتناسبة ' : ه : ه :: ه : د يحدث

$$\frac{ه}{ه} = \frac{د}{ه} \text{ او } \frac{ه}{ه} = \frac{د}{ه}$$

واذا ضرب طرف ووسط متناسبة في عدد واحد أو قسما عليه بقيت المتناسبة

على حالها لانه يستنتج من المساوية  $\frac{ه}{ه} = \frac{د}{ه}$  أن

$$\frac{ه}{ه} = \frac{د}{ه} \text{ او } ه : د :: ه : ه \text{ وم}$$

ويستنتج ايضا من المساوية المذكورة  $\frac{ه}{ه} = \frac{د}{ه}$  ومن هذه يحدث

$$\frac{ه}{ه} = \frac{د}{ه} \text{ أي } ه : د :: ه : ه \text{ وم}$$

وبمثل هذا يبرهن على حالة القسمة

واذا كان لمتناسبتين نسبة مشتركة تركب من النسبتين الاخرين منهما متناسبة

فالمتناسبتان

$$ه : د :: ه : و \text{ و } ه : د :: ه : و$$

$$\frac{ه}{ه} = \frac{د}{ه} \text{ و } \frac{ه}{ه} = \frac{د}{ه} \text{ ومن هاتين المتساويتين يحدث}$$

$$\frac{ه}{ه} = \frac{د}{ه} \text{ أي } ه : د :: ه : و$$

ومنى اتحد المقدمان أو التالبان في متناسبتين تركب من غير المتحد منهما

متناسبة فالمتناسبتان

$$ه : د :: ه : و \text{ و } ه : د :: ه : و$$

$$ه : د :: ه : و \text{ و } ه : د :: ه : و$$

يستنتج منهما بمقتضى ما تقدم

$$ه : د :: ه : و \text{ و } ه : د :: ه : و$$

$$ه : د :: ه : و \text{ و } ه : د :: ه : و$$

وكل متناسبة هندسية كالمتناسبة ه : د :: ه : و يمكن وضعها

هكذا  $\frac{ه}{ه} = \frac{د}{ه}$  وبإضافة واحد لكل من طرفي هذه المتساوية أو طرحه

منها نؤول الى



$$1 \pm \frac{2}{3} = 1 \pm \frac{2}{3} \text{ أى}$$

$$\frac{1 \pm \frac{2}{3}}{1} = \frac{1 \pm \frac{2}{3}}{1} \text{ ومنها يحدث}$$

و : ه :: ه : و و : ه :: ه : و  
ويحدث أيضا من مقارنة التناسبة ه : و :: ه : و بكل من  
التناسبتين المتقدمتين ان

$$و : ه :: ه : و و : ه :: ه : و$$

ومنها يحدث

$$و : ه :: ه : و و : ه :: ه : و$$

وينتج من ذلك أن نسبة المقدم الاول زائدا أو ناقصا التالى الاول الى هذا  
التالى كنسبة المقدم الثانى زائدا أو ناقصا التالى الثانى الى هذا التالى  
وأن نسبة المقدم الاول زائدا أو ناقصا التالى الاول الى هذا المقدم كنسبة  
المقدم الثانى زائدا أو ناقصا التالى الثانى الى هذا المقدم وأن نسبة المقدم  
الاول زائدا تاليه الى هذا المقدم ناقصا تاليه كنسبة المقدم الثانى زائدا تاليه  
الى هذا المقدم ناقصا تاليه

واذا غير وسط التناسبة ه : و :: ه : و آلت الى

$$ه : و :: ه : و ومنها يحدث بناء على ما تقدم$$

$$ه : و :: ه : و و : ه :: ه : و ومنها يحدث$$

$$و : ه :: ه : و و : ه :: ه : و$$

اعنى ان نسبة حاصل جمع افاضل مقدمى متناسبة الى حاصل جمع افاضل  
تاليها كنسبة اى مقدم الى تاليه وان نسبة حاصل جمع المقدمين وحاصل جمع  
التاليين تعادل النسبة بين فاضل المقدمين وفاضل التاليين والمتناسبة التى  
بهذه الصورة ه : و :: ه : و ر : ح :: ط : ع :: الخ تسمى  
متناسبة متوالية

وكل متناسبة متوالية حاصل جمع مقدماتها الى حاصل جمع تواليها كنسبة

اي مقدم الى تاليه فاذا رخص للنسبة المشتركة في هذه المناسبة بالحرف ل  
تحصل  $\frac{ج}{د} = \frac{ل}{و} = \frac{ز}{ح} = \frac{ط}{ع} = \frac{س}{هـ}$  الخ  
ومنها يحدث

$\frac{ج}{د} = \frac{ل}{و} = \frac{ز}{ح} = \frac{ط}{ع} = \frac{س}{هـ}$  الخ  
وبجمع هذه المتساويات طرفا الى طرف يحدث

$\frac{ج + هـ + ز + ح + ط + ع}{د} = \frac{ل + و + س + هـ + ز + ح + ط + ع}{هـ}$  الخ  
ومنها يحدث

$\frac{ج + هـ + ز + ح + ط + ع}{د} = \frac{ل + و + س + هـ + ز + ح + ط + ع}{هـ}$  الخ فاذن يكون

$\frac{ج + هـ + ز + ح + ط + ع}{د} = \frac{ل + و + س + هـ + ز + ح + ط + ع}{هـ}$  الخ  
واذا ضربت جملة متناسبات في بعضها كل حد في نظيره تكون من حواصل  
الضرب الاربعة المختلفة متناسبة فالتناسبات

$ج : د :: هـ : و :: ز : ح :: ط : ع :: س : هـ :: و : د$   
يحدث منها

$\frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح} = \frac{ط}{ع} = \frac{س}{هـ}$  وبضربها في بعضها يحدث

$\frac{ج ز ح ط ع س}{د و ح ع هـ} = \frac{ج ز ح ط ع س}{د و ح ع هـ}$  اي  $ج : د :: هـ : و :: ز : ح :: ط : ع :: س : هـ :: و : د$

واذا رفع كل من الحدود الاربعة لمتناسبة الى درجة ما واخذ جذر كل منها  
بدرجة واحدة لم تزل متناسبة

فالتناسب  $ج : د :: هـ : و$  نوضع هكذا

$\frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و}$  فاذا رفع طرفاه هذه المتساوية لدرجة ما واخذ جذراهما بدرجة  
ما بقيت على حالها فيكون

$\frac{ج^{\frac{1}{2}}}{د^{\frac{1}{2}}} = \frac{هـ^{\frac{1}{2}}}{و^{\frac{1}{2}}}$  ومنها يحدث

ج : د :: هـ : و و ج : د :: هـ : و

\* (في المتواليات العددية) \*

(٩٤) كل متسلسلة مركبة من حدود يزيد أحدها عن سابقه أو ينقص عنه بكمية ثابتة تسمى متوالية عددية أو تفاضلية والكمية الثابتة تسمى أساس المتوالية فالمتسلسلتان

١ و ٤ و ٧ و ١٠ و ١٣ و ١٦ و ١٩ و ٢٢ و ٢٥ و ٢٨ و ٣١ و ٣٤ و ٣٦ و ٤٠ و ٤٤ و ٤٨ و ٥٢ و ٥٦ و ٦٠  
تسميان متوالتين الأولى تسمى متوالية عددية تصاعدية أساسها ثلاثة  
والأخرى تنازلية أساسها أربعة فالمتوالية العددية تكون تصاعدية أو تنازلية  
بحسب كون أساسها موجبا أو سالبا

وإذا رمز بالحروف ج و د و هـ و ... الخ لحدود متوالية  
عددية توضع هكذا

ج . د . هـ . و . ز . ح . ط . ... ل .  
ويلفظ بها ج الى د كنسبة د الى هـ كنسبة هـ الى و الى ... الخ  
وإذا رمز للأساس بالحرف م وللحد الأول بالحرف ج وللحد الأخير  
المسبق بحدود عددها ٥ - ١ بالحرف ل تحصل بمقتضى التعريف  
ج + د = هـ د + هـ = و و = ز + هـ = ل ... و ل = ز + م أي  
د + ج = هـ و + د = ز و + ز = ح ... و ل = ح + (٥ - ١) م  
أي أن أي حد من متوالية عددية يساوي الحد الأول مضافا إليه حاصل  
ضرب عدد الحدود السابقة له في الأساس

وحيث أن المعادلة ل = ج + (٥ - ١) م ... (١)

تشتمل على أربع كميات لا يمكن إدرالها أحدها إلا بعد معرفة الثلاث الأخرى  
وإذا أريد إدخال جملة حدود عددها م بين أي حدين معلومين بشرط  
أن يتركب من الجميع متوالية عددية شوهذان هذه المتوالية لا تحتاج

\* (١٣٥) \*

في تركيبها الالتمين اساسها المجهول ولذا يستخرج من القانون (١)

$$س = \frac{ل - ٢}{١ - ٢}$$

وحيث ان  $٢ = م + ٢$  يكون

$$س = \frac{ل - ٢}{١ + م}$$

اعني ان اساس المتوالية المطلوبة يساوى خارج قسمة فاضل الحدين المعنوين على عدد الحدود المدخلة زائدا واحدا

فاذا اريد اذخال ثمانية حدود بين العددين ٤ و ٤٩ بحيث يتركب من الجميع متوالية عددية وضع في المعادلة  $س = \frac{ل - ٢}{١ + م}$  بدل ل و ٢ و م مقاديرها وهي ٤٩ و ٤ و ٨ فيحصل  $س = \frac{٤ - ٤٩}{٩} = ٥$  اعني ان الاساس المطلوب يساوى ٥ وحينئذ تتركب المتوالية هكذا

٤ . ٩ . ١٤ . ١٩ . ٢٤ . ٢٩ . ٣٤ . ٣٩ . ٤٤ . ٤٩  
وحاصل جمع كل حدين كائنين على ابعاد متساوية من طرفي متوالية يساوى  
حاصل جمع هذين الطرفين من المتوالية العددية

ب . ج . د . هـ . و . ح . ط . ل . يتحصل

$$د = ج + س \quad \text{و} \quad ط = ل - س \quad \text{ومنهما يحدث}$$

$$د + ط = ج + ل$$

وقس على هذا

(٩٥) واذا اريد تحصيل مقدار حاصل جمع حدود متوالية عددية كالمتوالية

ب . ج . د . هـ . و . ح . ط . ل . . . . . ل

يتحصل بالبناء على ما تقدم

$$ع = ج + (ج + س) + (ج + ٢س) + \dots + (ج + (٢ - ١)س)$$

بالرمز بالحرف ع لمقدار حاصل جمع حدود المتوالية المطلوب ولايجاد قانون مختصر عن هذا الوضع المتساوية المتقدمة بهاتين الصورتين

$$ع = ٢ + (٢ + س) + (٢ + س٢) + \dots + (٢ + س^{٢٠٠}) + (٢ - س) + (٢ - س٢) + \dots + (٢ - س^{٢٠٠}) + ٢$$

$$ع = ٢ + (٢ - س) + (٢ - س٢) + \dots + (٢ - س^{٢٠٠}) + (٢ + س) + (٢ + س٢) + \dots + (٢ + س^{٢٠٠}) + ٢$$

وبجمع هاتين المتساويتين طرفا الى طرف وملاحظة ان حاصل جمع كل حدين

متحدين في الرتبة يؤتى الى  $٢ + ٢ = ٤$  يتحصل

$$٢ ع = ٢ + ٢ مكررا بقدر عدد الحدود اى$$

$$٢ ع = (٢ + ٢) م منها يحدث$$

$$ع = \frac{٢(٢+٢)}{٢} \dots \dots \dots (٢)$$

اعنى ان حاصل جمع حدود متوالية تفاضلية يساوى نصف حاصل جمع حديها

المتطرفين مكررا بقدر عدد حدودها

واذا وضع فى القانون (٢) بدل الحد الاخير ل مقداره المبين بمعادلة (١)

آل الى

$$ع = \frac{٢(٢ + (١ - س))}{٢}$$

(٩٦) تحل المسائل المتعلقة بالمتواليات العددية بواسطة القانونين (١) و (٢)

وذلك انه اذا علم ثلاث كميات من الخمس  $٢$  و  $س$  و  $٢$  و  $ل$  و  $ع$

الداخله فى القانونين (١) و (٢) امكن تعيين الاثنتين الاخرين ومن

تعشيق هذه الكميات الخمس مع بعضها بفرض ثلاث منها معلومة وباقيها

مجهول لا يحدث عشر مسائل سهلة الحل لانه يتحصل دائما معادلتان ذاتا

مجهولين

وهالك جدول لا يشتمل على حل المسائل العشر المتقدمة ذكرناه هنا لمن يريد

ممارسة ذلك

عدد	المسائل	معالم	مجاهيل	مقادير المجاهيل
١	و، س، و	ل، و، ع	$ل = ل + س + (١ - ل) س$	$و = ل + س + (١ - ل) س$
٢	ع، و، س، و	ل، و، ع	$ل = ل + س + (١ - ل) س$	$و = ل + س + (١ - ل) س$
٣	ل، و، س، و	ل، و، ع	$ل = ل + س + (١ - ل) س$	$و = ل + س + (١ - ل) س$
٤	و، ل، و، س	ل، و، ع	$ل = ل + س + (١ - ل) س$	$و = ل + س + (١ - ل) س$
٥	و، ع، و، س	ل، و، ع	$ل = ل + س + (١ - ل) س$	$و = ل + س + (١ - ل) س$
٦	ل، و، ع، و	ل، و، ع	$ل = ل + س + (١ - ل) س$	$و = ل + س + (١ - ل) س$
٧	و، ل، و، س	ل، و، ع	$ل = ل + س + (١ - ل) س$	$و = ل + س + (١ - ل) س$
٨	و، ع، و، س	ل، و، ع	$ل = ل + س + (١ - ل) س$	$و = ل + س + (١ - ل) س$
٩	ل، و، س، و، ع	ل، و، ع	$ل = ل + س + (١ - ل) س$	$و = ل + س + (١ - ل) س$
١٠	و، ل، و، ع	ل، و، ع	$ل = ل + س + (١ - ل) س$	$و = ل + س + (١ - ل) س$

\* (مسائل يطلب حلها من الطلبة) \*

(٩٧) الاولى ان يطلب تعيين الحد الاول وعدد الحدود من متوالية عددية اساسها ٨ وحدها الاخير ٢٨٥ وحاصل جمعها ٢٩٤٥  
 الثانية ان يطلب ادخال تسعة اوساط عددية بين اى حدين من المتوالية  
 ٢ . ٥ . ٨ . ١١ . ١٤ . ١٧

الثالثة ان يطلب معرفة عدد طابور مثلث صفه الاول نفر واحد والثاني نفران والثالث ثلاثة وهكذا الى صف يكون عدد انفاره مساويا ٥  
 الرابعة ان يطلب ايجاد حاصل جمع حدود المتوالية الفردية  
 ١ . ٣ . ٥ . ٧ . ٩ . . . . . التى عدد حدودها ٥

الخامسة ان يراد ترميل طريق بعيدة عن تل رمل بمقدار ٤٠ ميتر وقد عملت مقايضة ذلك فوجد انه يلزم لترميلها شحن مائة عرباته كل منها بعيدة عن مجاورتها بستة امتار بشرط ان يكون موضع العرباته الاولى على بعد من التل يساوى ٤٠ مترا وان ترجع العربات الاخيرة الى المحل الذى شحنت منه والمطلوب معرفة عدد الامتار التى يقطعها سواق العربات فى ترميل الطريق المذكورة

السادسة راجل يقطع عشرة فراسخ فى اليوم الواحد وفارس يقطع فى اول يوم ثلاثة فراسخ ويزيد سيره فى كل يوم عن سابقه فرسخين سارا فى آن واحد والمطلوب معرفة عدد الايام التى تمضى من ابتداء سيرهما الى نقطة تلاقيهما والمسافة التى يقطعها كل منهما

\* (فى المتواليات التقسيمية اى الهندسية) \*

(٩٨) كل متسلسلة مركبة من جملة حدود متتالية خارج قسمة احدها على سابقه ثابت او كل حد منها مساو لسابقه مضروبا فى كمية ثابتة تسمى متوالية والكمية الثابتة تسمى اساس المتوالية  
 وبمقتضى هذا التعريف تكون المتوالية تصاعدية او تنازلية بحسب اساسها اى بحسب كونه اكبر من الواحد او اصغر منه فحينئذ تكون المتوالية







$$ع (س-١) = س - س = س (س-١) ومنها يستخرج$$

$$ع = \frac{س-١}{س-١} \dots \dots \dots (٣)$$

واذا وضع ل بدل الحد الاخير الذى مقداره  $س-١$  فى المعادلة (٣) تؤل الى

$$ع = \frac{س-١}{س-١}$$

اعنى ان مجموع حدود متوالية هندسية يساوى خارج قسمة باقى طرح الحد الاول من حاصل ضرب الحد الاخير فى الاساس على باقى طرح الواحد من الاساس

(١٠١) جميع المسائل المتعلقة بالمتواليات الهندسية تحل بواسطة المعادلتين (١) و (٣) المحتويتين على الكميات الخمس  $س$  و  $س-١$  و  $ل$  و  $ع$  اذا علم منها ثلاث لانه حينئذ يمكن تعيين الاثنتين الاخرين الا ان اغلب حل المسائل المذكورة يتوقف على قواعد تأتى كما لو كان احد المجهولين  $س$  الذى هو عدد حدود المتوالية فانه يؤل الامر الى حل معادلة مشتقة على اس مجهول وكما لو كان المجهولان  $س$  و  $س-١$  او  $ل$  و  $س-١$  فانه يؤل الامر الى حل معادلة ذات درجة مساوية لعدد حدود المتوالية

واذا استعملت المعادلة (٢) الحادثة من المعادلة (٣) بواسطة القسمة آل الامر الى حل معادلة ذات درجة مساوية  $س-١$

واذا كان الاساس  $س = ١$  استعملت المعادلة (٢) بدل المعادلة (٣) لانه يحدث من المعادلة (٣) للمجموع  $ع$  مقدار غير معين اى ان  $ع = \div$  واما المعادلة (٢) فانها تحدث له مقدارا محدودا اى ان  $ع = ك$  وقد تقدم ان المقدار غير المعين ينشأ عن وجود مضروب مشترك فالمضروب المشترك للمعادلة (٣) هنا هو  $(س-١)$  انظر (بند ٥١)

(١٠٢) متى كان الاساس المرموز له بالحرف  $س$  اصغر من الواحد

اي كسر اصدار المتوالية تنازلية فينثذ قانون (٣) يكتب هكذا

$$ع = \frac{7}{1-س} - \frac{7}{1-س} = \frac{7(1-س)}{1-س} = 7$$

فيشاهد من فرض  $س > 1$  انه اذا ازداد العدد 7 شيا فشيئا نقصت

الكمية  $\frac{7}{1-س}$  كذلك وعليه فيمكن اخذ العدد 7 كبيرا بحيث يكون

المقدار  $\frac{7}{1-س}$  اقل من كل كمية معلومة فعلى ذلك كلما اخذت حدود

اكبر من الحدود المتعاقبة للمتوالية بالابتداء من الحد الاول قرب مقدار

ع من  $\frac{7}{1-س}$  فاذن يمكن اخذ حدود كافية ليكون حاصل جمعها مختلفا

عن  $\frac{7}{1-س}$  بقدر ما يراود وعليه فيقال ان نهاية حاصل جمع جملة حدود من

المتوالية التنازلية بالابتداء من الحد الاول تكون مساوية للكسر  $\frac{7}{1-س}$

فاذا كان عدد حدود المتوالية لانهايا كان حاصل جمعها مساويا  $\frac{7}{1-س}$

اي ان حاصل جمع حدود متوالية تنازلية عدد حدودها لانهايا يساوى خارج

قسمة حدها الاول على قاضل الواحد والاساس

(١٠٣) ويمكن تعيين هذا الحاصل من اول الامر بفرض المتوالية

التنازلية التي عدد حدودها لانهايا هكذا

ب : ج : د : هـ : و ..... الخ ومنها يحدث

د = ج + هـ = د + و = هـ = و ..... الخ

وبجمع هذه المتساويات طرفا الى طرف يتحصل

د + هـ + و ..... الخ = (ج + د + هـ + و ..... الخ) + د

وحيث ان الطرف الاول من هذه المتساوية يساوى حاصل جمع حدود

المتوالية المذكورة ماعدا الحد الاول اي يساوى ع - ج وان

الطرف الثاني يساوى مجموع حدودها مكررا بقدر الاساس د اي يساوى

ع + د يكون ع - ج = ع + د او ع (١ - د) = ج ومنها يحدث

$$ع = \frac{ج}{1-د}$$

وهو مقدار مجموع حدود المتوالية المذكورة لانه اذا اجريت عملية القسمة

على المقدار  $\frac{1}{10}$  جلت  $\frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10}$  الخ  
وهو ناتج غير مخالف للمتوالية  $\frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10}$  الخ  
المفروضة الا في تبديل الحدود  $\frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10}$  الخ بمقاديرها  
المبينة بدالة الحد الاول والاساس

(١٠٤) يمكن تعيين كسر اعتيادي مكافئ لكسر دائري بسيط بواسطة  
القانون المعدل لايجاد حاصل جمع حدود متوالية تنازلية غير منتهية لان الكسر  
الدائري البسيط

مثلا يمكن وضعه بهذه الصورة  $\frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10}$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$$

فقد آل الكسر المذكور حينئذ الى متوالية تنازلية غير منتهية بمجموع  
حدودها  $\frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10}$  وهو الكسر  
الاعتيادي المكافئ للكسر الدائري البسيط المفروض

ويمكن تعيين كسر اعتيادي مكافئ لكسر دائري مركب بواسطة القانون المعدل  
لايجاد حاصل جمع حدود متوالية تنازلية غير منتهية وذلك ان الكسر الدائري  
المركب  $\frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10}$  يكون اصغر من  $\frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10}$   
اي من  $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10}$  مساويا للاعتيادي

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : \frac{1}{10}$$

\*(مسائل تحل بواسطة المتواليات الهندسية)\*

(١٠٥) الاولى لماخير مخترع الشطرنج في طلب جائزة اختار  
ان يوضع له في الخانة الاولى حبة قمح وفي الثانية حبتان وفي الثالثة اربع وفي  
الرابعة ثمان وهكذا اي ان يوضع في كل خانة تالية ضعف سابقها الى الرابع  
والستين خانة فاعدد الحب الذي يأخذه المخترع المذكور

فالجواب ان عدد الحب المطلوب يساوى حاصل جمع حدود متوالية هندسية  
معلوم منها  $1 = 7$  و  $2 = 35$  و  $3 = 127$  فاذن يكون

$$18448744073709501615 = 1 - 2 = \frac{1-2^{25}}{1-2} = \frac{1-33554432}{1-2} = 33554431$$

ومن المعلوم في التجارب ان المربا جرام اى العشرة آلاف جرام تساوى  
٢٦١٠٠٠ حبة تقريبا فيكون مقدار ع مساويا ٧٠٦٧٧١٨٠٣٥٩٠٤٠  
مربا جراما وحيث كان ثمن المربا جرام يساوى فرنكين يكون ثمن ما يأخذه  
المخترع مساويا ١٤١٣٥٤٣٦٠٧١٨٠٨٠ فرنكا

الثانية مريض وهب لمريض آخر فى مرض موته عبدا له فوهبه الآخر  
فى مرض موته للاول ولا شئ لهما سواه وحيث ان هبة مرض الموت لا تنفذ  
الا فى الثلث ان كانت لغير وارث اوله واجازها باقى الورثة يكون للموهوب له  
 $\frac{1}{3}$  العبد وللواهب ثلثاه وبهية الموهوب له يرجع للواهب من هذا الثلث  
ثلثه وبناء عليه فقد زاد ماله وزادت هبته للموهوب له وسقى زادت هبة  
الموهوب له زاد مال الواهب الاول وبناء عليه يزيد مال الموهوب له وهكذا  
فاذن يلزم الدور والمطلوب تعيين ما يخص كلا من المريضين فى العبد  
المذكور

فالجواب ان يفرض ثمن العبد ونفسه مساويا للواحد فيكون مقدار ما وهبه  
الاول منه مساويا  $\frac{1}{3}$  ومقدار هبة الموهوب له مساوية لثلث الثلث وبناء عليه  
تكون حصة الواهب الاول  $\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$  وحصة الموهوب له  $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}$   
وحيث زاد مال الواهب الاول ثلث الثلث اى  $\frac{1}{9}$  يرجع للواهب الثانى  
ثلث  $\frac{1}{9}$  اى  $\frac{1}{27}$  فاذن تكون

$$\text{حصة الواهب الاول} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}$$

$$\text{وحصة الواهب الثانى} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$$

وحيث زاد مال الواهب الثانى بمقدار ثلث التسع اى  $\frac{1}{27}$  يرجع للواهب  
الاول منها ثلثها وهو  $\frac{1}{81}$  فاذن تكون

\* (١٤٥) \*

حصة الواهب الاول  $\frac{1}{81} + \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{2}{3}$

وحصة الواهب الثانى  $\frac{1}{81} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$

وحيث زاد للواهب الاول  $\frac{1}{81}$  من العبد يرجع للواهب الثانى منه ثلثه اى  $\frac{1}{243}$  وبناء عليه تكون

حصة الواهب الاول  $\frac{1}{243} - \frac{1}{81} + \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{2}{3}$

وحصة الواهب الثانى  $\frac{1}{243} + \frac{1}{81} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$  وهكذا

فقد نشأ من هذه الهبة الدور والتسلسل فاذن تكون حصة كل منهما مساوية

لفاضل حاصلى جمعى متواليتين تنازليتين غير نهايتين فتواليتا الواهب الثانى

$\frac{1}{3} : \frac{1}{27} : \frac{1}{243} : \dots$  الخ و  $\frac{1}{9} : \frac{1}{81} : \frac{1}{729} : \dots$  الخ

ومنها ينتج ان حصته الحقيقية مساوية  $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$  فقد اال

الثلث الذى هو حصة الواهب الثانى الى ربيع وبناء عليه تكون حصة الواهب

الاول ثلاثة ارباع

فلتعيين حصة الواهب الاول يجرى العمل المذكور فى تعيين حصة

الواهب الثانى

الثالثة احد المصورين عنده ٨ صور يريد بيعها فدفق له فى كل واحدة

١٥٠ غر شامرة واحدة ثم دفع له فى اداها ثمن قدره خمسة غروش وفيما

فرقه عشرة غروش وهكذا بتضعيف الثمن الى الثامنة والمراد معرفة اربح

البيعين

(فالجواب ان البيع الثانى اربح)

ارابعة برمىل من الخل يحتوى على مائة اقه صتا يؤخذ منه كل يوم اقة

واحدة ويضاف اليه اقة ماء بدلها والمطلوب معرفة عدد مرات تكرار هذا

الفعل حتى لا يبقى من الخل الا الربع

(فالجواب انه لا بد من تكرار الفعل ١٨٣ مرة)

\* (فى اللوغاريتم) \*

(١٠٦) قبل الشروع فى الخواص العمومية للوغاريتم واستعمانه

في العمليات الحسابية نذكر نظرية هي ان جميع الاعداد تنبع من قوى عدد موجب اكبر من الواحد او اصغر منه بيان ذلك ان يقال

اولا اذا رمز بالرمز  $\omega$  لعدد ثابت موجب اكبر من الواحد وكونت

القوى المتوالية  $\omega^1, \omega^2, \omega^3$  الخ حدث من ذلك جملة اعداد لا تزال

اخذة في الزيادة الى غير نهاية ومقاربة من بعضها كلما تقاربت اسس هذه

القوى من بعضها ومن هنا يؤخذ انه اذا رمز بالرمز  $\omega$  و  $\omega^2$  و  $\omega^3$

لكميتين متغيرتين وفرضت المعادلة  $\omega = \omega^2$  وفرض للمتغير  $\omega$

جملة مقادير مقاربة من بعضها من ابتداء الصفر الى  $\infty$  كان

للمتغير  $\omega^2$  جملة مقادير مقاربة من بعضها بحيث اذا زاد  $\omega$  بكيفية

متوالية من ابتداء الصفر الى  $\infty$  اخذ  $\omega^2$  جميع المقادير من الواحد

الى  $\infty$  واذا فرض للمتغير  $\omega^2$  مقادير سالبة بان كان

$\omega = -\omega^2$  الت المعادلة المتقدمة الى

$$\omega = -\omega^2 = \frac{1}{\omega^2}$$

واذا فرض ان  $\omega$  ياخذ مقادير من ابتداء الصفر الى  $\infty$  فان

$\omega^2$  ياخذ مقادير من ابتداء الواحد الى  $\infty$  وحينئذ ياخذ

$\frac{1}{\omega^2}$  مقادير من ابتداء الواحد الى  $\frac{1}{\infty}$  اي الى الصفر

وثانيا اذا فرض ان  $\omega$  يدل على عدد دون الواحد مبين بالكسر  $\frac{1}{\omega}$  (بفرض

$\omega$  عددا اكبر من الواحد) نؤول المعادلة  $\omega = \frac{1}{\omega^2}$  الى  $\omega^3 = \frac{1}{\omega}$

فاذا اخذ  $\omega$  جميع المقادير من ابتداء الصفر الى  $\infty$  اخذ  $\omega^3$

جميع

جميع الأعداد من الواحد الى  $\infty$  فينثذ تكون جميع مقادير  $\infty$  محصورة بين الواحد والصفر وإذا اخذ المتغير  $\infty$  مقادير من ابتداء الصفر الى  $\infty$  اخذ  $\infty$  جميع الأعداد المحصورة بين الواحد والصفر فينثذ يكون للمتغير  $\infty$  جميع الأعداد من ابتداء الواحد الى  $\infty$

(١٠٧) حيث تقرانه يمكن تكوين جميع الأعداد من القوى المتنوعة لعدد ثابت يطلق اسم لوغار يتم هذه الأعداد على اساس القوى المتنوعة المذكورة المساوية لجميع الأعداد بالتناظر وحينثذ يكون كل مقدار للمتغير  $\infty$  في المعادلة  $\infty = \infty$  لوغار يتما للمقدار المطابق له من مقادير  $\infty$  (بفرض  $\infty$  عددا موجبا ويسمى اساس الجمله اللوغاريتمية) وإذا بوضع  $\infty = \text{لوغا } \infty$

(١٠٨) اذا فرض ان  $\infty$  و  $\infty$  و  $\infty$  و  $\infty$  الخ رموز لاعداد  $\infty$  و  $\infty$  و  $\infty$  و  $\infty$  الخ رموز للوغاريتماتها بالنسبة لجمله اساسها  $\infty$  حدث

$$\begin{aligned} \infty &= \infty \text{ و } \infty = \infty \text{ و } \infty = \infty \text{ ومنها يحدث} \\ \frac{\infty}{\infty} &= \frac{\infty}{\infty} \text{ و } \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ و } \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \\ \text{ومن هنا يؤخذ بمقتضى قاعدة الاسس} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \infty \times \infty \times \infty \dots \text{ الخ} &= \frac{\infty + \infty + \infty + \dots}{\infty} \text{ ومنها يحدث} \\ \text{لوغا } \infty \times \infty \times \infty \dots \text{ الخ} &= \infty + \infty + \infty + \dots \text{ الخ و} \\ \text{لوغا } \frac{\infty}{\infty} &= \infty - \infty \text{ و لوغا } \infty = \infty \text{ و لوغا } \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$



\* (١٤٨) \*

فيئذ يكون  $لونا صه صه صه ... الخ = لونا صه$

$+ لونا صه + لونا صه + ... الخ$

$و لونا صه = لونا صه - لونا صه .$

$و لونا صه = م لونا صه و لونا صه = لونا صه$

وهذه المتساويات الأربع تستنبط منها قواعد

الاولى ان لوغاريتم حاصل ضرب يكون مساويا لمجموع لوغاريتمات مضاربه  
الثانية ان لوغاريتم خارج قسمة عددين يكون مساويا للوغاريتم المقسوم  
مطروحاً منه لوغاريتم المقسوم عليه

الثالثة ان لوغاريتم اى قوة لاي عدد يكون مساويا للوغاريتم هذا العدد  
مضروباً في درجة القوة المذكورة

الرابعة ان لوغاريتم جذر اى عدد يكون مساويا للوغاريتم هذا العدد مقسوماً  
على درجة الجذر المذكور

ويؤخذ من القاعدة الثانية ان لوغاريتم اى كسر يكون مساويا للوغاريتم  
بسطه مطروحاً منه لوغاريتم مقامه وينتج من القاعدة تين الاوليين ان لوغاريتم  
الحدا الرابع من متناسبة يكون مساويا لمجموع لوغاريتمى الوسطين مطروحاً منه  
لوغاريتم الحدا الاول

(١٠٩) يؤخذ من تعريف اللوغاريتم ومما تقدم في (١٠٦)

اولا ان الاساس في كل جملة لوغاريتمية يكون مساويا للواحد ويكن  
لوغاريتم الواحد مساويا للصفر

وثانيا ان الاساس اذا كان اكبر من الواحد كانت لوغاريتمات الاعداد التى  
فوق الواحد موجبة ولوغاريتمات الاعداد التى دون الواحد سالبة ولوغاريتم

الصفر — ٥٥



الأعداد التي ليست من القوى الصحيحة لعدد ١٠ فإنها تتعين بعدد  
اعشاري وأما الجزء الصحيح للوغاريتم عددا كبيرا من الواحد فإنه يحتوى على  
عدة من الآحاد مساوية لعدد أرقام هذا الجزء ناقصا واحدا لانا إذا رمزنا  
لعدد أرقام الجزء الصحيح بالرمز  $\bar{c}$  كان العدد محصورا بين ١٠ و  $\bar{c}-1$   
وبناء على ذلك يكون لوغاريتمه محصورا بين  $\bar{c}-1$  و  $\bar{c}$  وحينئذ  
يكون مركبا من آحاد عددها  $\bar{c}-1$  ومن جزء اعشاري أقل من  
الواحد ولذا أطلق على الجزء الصحيح من كل لوغاريتم اسم العدد البياني  
\*(في المقسم اللوغاريتمى)\*

المقسم اللوغاريتمى لعدد هو لوغاريتم مقلوب هذا العدد ويقال لاحد العددين  
مقلوب الآخر متى كان حاصل ضربهما مساويا للواحد فنحو ٣ أو  $\frac{1}{3}$   
و  $\frac{1}{4}$  يقال لكل منهما مقلوب الآخر وعليه إذا رمز بالرمز  $\bar{c}$  لعدد  
مقلوبه  $\frac{1}{\bar{c}}$  يحدث

$$1 = \frac{1}{\bar{c}} \times \bar{c}$$

وبأخذ لوغاريتم كل من الطرفين يحدث

$$\text{لوغا } \bar{c} + \text{لوغا } \frac{1}{\bar{c}} = \text{لوغا } 1 = 0 \text{ ومنها يؤخذ}$$

$$\text{لوغا } \frac{1}{\bar{c}} = - \text{لوغا } \bar{c}$$

اعنى ان المقسم اللوغاريتمى لعدد يساوى لوغاريتم العدد بعلامة مخالفة لعلامته  
وحيث ان الجداول اللوغاريتمية لا تحتوى الا على لوغاريتمات الأعداد  
الصحيحة يلزم لايجاد لوغاريتم كسر ان تطبق عليه القاعدة المتقدمة  
فى (بند ١٠٨) ومتى كان الكسر المقروض أقل من الواحد ~~ممكن~~ تعين  
لوغاريتمه السالب على وجهه يكون جزءه الاعشارى موجبا ولذا يلزم ان  
يضاف بالاختيار على لوغاريتم البسط عدد من الآحاد حتى يتيسر ان يطرح منه  
لوغاريتم المقام ويطرح هذا العدد من الباقي مثال ذلك ان يكون لوغاريتم  
البسط ١٣٤٩٥٨٦٢ ولوغاريتم المقام ١٢٧٦١٢٥٨٤٣ فيلزم ان يطرح

اللوغاريتم

اللوغاريتم الثانى من الاول بعد ان يضاف اليه ٣ فيحدث ١٠ ٧٦٥٣١٠ ٥ ر  
وحيث انه يلزم ان يطرح ٣ من هذا الباقي يكتب هكذا

$$\overline{٣} ٧٦٥٣١٠ ١$$

والعلامة — الموضوعة فوق العدد البياني لاتتعلق بغيره

فاذا اريد تغيير المقدار  $\overline{٣} ٧٦٥٣١٠ ١$  باخر مكافى له الا انه سالب

$$\text{شوهذان } \overline{٣} ٧٦٥٣١٠ ١ = \overline{٣} - ٧٦٥٣١٠ ١ = ٠ ٧٦٥٣١٠ ١$$

$$- ٢ - (١ - ٠ ٧٦٥٣١٠ ١) = - ٢ ٣٤٦٨٩٩ ٢ \text{ وهذا}$$

التحويل يؤخذ من طرح واحد من المقدار المطلق للعدد البياني وطرح الرقم  
الاول عن يمين الجزء الاعشارى من ١٠ وباقي الارقام الاعشارية

من ٩

ويلزم تحويل لوغاريتم سالب بالكلية الى مقدار جزؤه الاعشارى موجب  
(اى الى المتمم اللوغارىتمى) ان يجرى على الجزء الاعشارى من اللوغاريتم  
السالب ما جرى عليه فى الحالة السابقة ويضاف الى العدد البياني واحد لان

$$- ٢ ٣٤٦٨٩٩ ٢ = - ٢ - ٢ ٣٤٦٨٩٩ ٢ = ٠ ٢ ٣٤٦٨٩٩ ٢$$

$$\overline{٣} ٧٦٥٣١٠ ١ = - ٣ + (٠ ٢ ٣٤٦٨٩٩ ٢ - ١)$$

واذا اريد ضرب اللوغاريتم  $\overline{٣} ٧٦٥٣١٠ ١$  فى عدد صحيح كالعدد

٤ مثلافان حاصل الضرب يكتب هكذا

$$\overline{٣} ٧٦٥٣١٠ ١ \times ٤ + - ٣ \text{ أو } ٠ ٦١٢٤٠ ٤ \text{ ر } ٩ \text{ ومتى}$$

كان اللوغاريتم مركبا من عدد بياني سالب وجزء اعشارى موجب واريد  
قسمته على عدد صحيح لزم ان يؤخذ خارج قسمة العدد البياني على وجهه به

يكون الباقي موجبا مثال ذلك ان يقسم  $\overline{٣} ٧٦٥٣١٠ ١$  على ٣ فيكون

خارج قسمة — ٧ على ٣ هو — ٢ والباقي ١ او خارج القسمة

٣ - والباقي + ٢ وبإدانة العمل يحدث ٣, ٧٧٦٥٢١٤  
وهو الناتج المطلوب

(١١٣) يؤخذ من القواعد المتقدمة في (بند ١٠٨) ان

$$\text{لوغا } (١٠ \times ٢) = \text{لوغا } ٢ + \text{لوغا } ١٠ = \text{لوغا } ٢ + ٣$$

$$\text{لوغا } \left(\frac{٢}{١٠}\right) = \text{لوغا } ٢ - \text{لوغا } ١٠ = \text{لوغا } ٢ - ٣$$

ومن هنا ينتج ان لوغاريتم حاصل ضرب عدد في القوى الصحيحة لعدد ١٠  
او خارج قسمته عليه يكون مساويا للوغاريتم هذا العدد مضافا اليه او مطروحا  
منه احاد صحيحة بقدر درجة القوة الصحيحة للعدد ١٠

وحينئذ يسهل معرفة العدد البياني للوغاريتم عدد اعشاري اصغر من الواحد  
لانه اذا رمز بالرمز ع لعدد الازهار الموجودة بين الشرطة واول رقم  
معنوي يوجد عن يمينها كان العدد المفروض اصغر من  $\frac{١}{١٠}$  واكبر من

$\frac{١}{١٠} + ١$  - حينئذ يكون لوغاريتم هذا العدد محصورا بين  $٣ - ع$  و  $٣ - (١ + ع)$   
اعني ان هذا اللوغاريتم يكون مساويا  $٣ - (١ + ع)$  مضافا اليه جزء  
اعشاري موجب او مساويا  $٣ - ع$  مضافا اليه جزء اعشاري سالب ومن  
هنا ينتج

اولا انه متى كان الجزء الاعشاري للوغاريتم عدد اعشاري اصغر من الواحد  
موجباً كان عدده البياني مساويا للعدد الدال على مرتبة اول رقم معنوي  
يوجد عن يمين الشرطة من العدد المفروض

وثانياً انه متى كان اللوغاريتم سالباً بالكلية كان عدده البياني اقل بواحد من  
العدد الدال على مرتبة اول رقم معنوي يوجد عن يمين الشرطة في العدد  
المفروض وعلى ذلك يكون العدد البياني الموجب او السالب للوغاريتم دالا  
على اعظم احاد العدد الذي ينسب اليه هذا اللوغاريتم

في استعمال الجداول اللوغاريتمية

في العمليات الحسابية.

(١١٤) استعمال هذه الجداول في العمليات الحسابية يرجع الى مسألتين (الاولى) ان يكون المعلوم عدد والمطلوب ايجاد لوغاريتمه (الثانية) ان يكون المعلوم لوغاريتم عدد والمطلوب ايجاد هذا العدد ويكفي في ذلك ان تشرح جدول اللوغاريتمات المعرب مطبقا عليه المسئلتان المذكورتان فنقول

\* (في شرح جدول اللوغاريتمات المعرب واستعماله) \*

(١١٥) هذا الجدول يتركب من ثلاثة اجزاء احدها يشتمل على لوغاريتمات الاعداد من الواحد الى ١٠٠٨٠ وهو عبارة عن اربع وثلاثين صحيفة كل صحيفة مشتملة على ستة صفوف رأسية معنونة على التوالي بلفظي اعداد وانساب اي لوغاريتمات وكل صف مقسوم الى ثمانية اقسام كل منها يشتمل على خمسة اعداد والصف المعنون بلفظة انساب يوجد تلو الصف المعنون بلفظة اعداد عن يساره بحيث يرى كل عدد من الاول موضوعا على يسار العدد المنسوب اليه من الثاني وجميع اعداد الصف المعنون بلفظة انساب مركب من ثمانية ارقام اولها من جهة اليسار العدد البياني والارقام السبعة الباقية هي الجزء الاعشاري من اللوغاريتم وجميع الاعداد البيانية هي الارقام الموضوعية في كل صف تحت العلامة هـ الموضوعية تحت لفظة انساب في رأس كل صف من جهة اليسار ولنشرع في تطبيق الجدول المذكور على المسألتين المذكورتين فنقول

\* (المسئلة الاولى العملية) \*

(١١٦) اذا كان المطلوب تحصيل اللوغاريتم المنسوب لعدد معلوم يقال اولاً اذا كان العدد المعلوم صحيحاً واصغر من ١٠٠٨٠ لزم ان يبحث عنه في الصف المعنون بلفظة اعداد ويؤخذ العدد المحاذي له الذي يوجد على يساره من الصف المعنون بلفظة انساب فيكون هذا العدد هو اللوغاريتم

### المطلوب

مثال ذلك ان يكون العدد المقروض ٤٥١٧ فيبحث عنه في الصفوف  
المعشونة بلفظة اعداد فيشاهد انه العدد الثاني من اعداد القسم الثامن من  
الصف الثالث المعنون بلفظة اعداد من (صفحة ٣٩) وحيث يكون العدد  
١٨٥٠٤٨٥٠١ و٣ الموضوع على يسار ٤٥١٧ هو اللوغاريتم المطلوب

الذي يوضع هكذا لوغا ٤٥١٧ = ٣,٦٥٤٨٥٠١ فيثبت يكون

لوغا ١ = ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠ و لوغا ٣١٥ = ٢,٤٩٨٣١٠٦

ولوغا ١٥ = ١,١٧٦٠٩١٣ و لوغا ٨٩١٥ = ٣,٩٥٠١٢١٣

وثانيا اذا كان العدد المعلوم صحيحا واكبر من ١٠٠٨٠ لزم تحويله الى

عدد اعشاري محصور بين ١٠٠٠ و ١٠٠٨٠

مثال ذلك ان يكون المطلوب تعيين لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ فيقال

حيث ان  $١٨٩٣٦٧ = ١٠٠ \times ١٨٩٣,٦٧$  يكون لوغاريتم العدد

١٨٩٣٦٧ بمقتضى (بند ١١٣) مساويا للوغاريتم العدد ١٨٩٣,٦٧

مضافا اليه العدد ٢ وبناء على ذلك يكفي لتعيين اللوغاريتم المطلوب ان

يعين لوغاريتم العدد ١٨٩٣,٦٧ بهذه المثابة وهي ان يقال

حيث ان العدد ١٨٩٣,٦٧ محصور بين ١٨٩٣ و ١٨٩٤

يكون لوغاريتمه محصورا بين اللوغاريتمين ٣,٢٧٧١٥٠٦ و ٣,٢٧٧٢٨٠٠

و ٣,٢٧٧٢٨٠٠ المنسوبين للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ ثم

انه يلزم ايجاد الكمية منه التي يراد اضافتها الى اللوغاريتم ٣,٢٧٧١٥٠٦

المنسوب للعدد ١٨٩٣ ليتكون من ذلك لوغاريتم العدد ١٨٩٣,٦٧

بان يؤخذ الفرق ٢٢٩٤,٠٠٠ بين اللوغاريتمين الجدولين المنسوبين

للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ ويقال ان نسبة الفرق ١ بين العددين

١٨٩٣ و ١٨٩٤ المتواليين الحاصرين بينهما العدد ١٨٩٣,٦٧

الى الفرق ٢,٦٧ بين العدد المعلوم والعدد ١٨٩٣,٦٧ كنسبة

الفرق ٢٢٩٤,٠٠٠ بين اللوغاريتمين الجدولين المنسوبين للعددين

الخاصين بينهما العدد المعلوم الى الفرق  $\text{سم}$  بين اصغر اللوغاريتمين  
الجدولين واللوغاريتم المطلوب اعني

١ : ٦٧ : ٠ : ٢٢٩٤ : ٠ :  $\text{سم}$  فحينئذ  $\text{سم} = ١٥٣٧ : ٠$   
ثم يضاف مقدار  $\text{سم}$  الى اللوغاريتم ٢٧٧١٥٠٦  $\text{سم}$  المنسوب  
للعدد ١٨٩٣ فالمجموع ٢٧٧٣٠٤٣  $\text{سم}$  يكون لوغاريتما للعدد  
١٨٩٣٦٧ فحينئذ يكون لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ هو  
٢٧٧٣٠٤٣  $\text{سم}$  وهذه المناوبة تعين لوغاريتم اى عدد صحيح  
وثالثا اذا اريد تعيين لوغاريتم كسر اعتيادي لزم ان يطرح لوغاريتم البسط  
من لوغاريتم المقام كما تقدم في (بند ١٠٨)

لكن اذا كان الكسر اكبر من الواحد اجريت عملية الطرح كما ذكر فيكون  
الباقى هو اللوغاريتم المطلوب واذا كان الكسر دون الواحد لزم ان يطرح  
لوغاريتم البسط من لوغاريتم المقام ثم يقرن الباقي بعلامة - فيكون  
النتيجة لوغاريتم الكسر المفروض

تنبيه \* اذا كان المطروح اكبر من المطروح منه وجب ان يطرح الاصغر  
من الاكبر ثم يقرن الباقي بعلامة - فبناء على ذلك يكون

$$\frac{١٥}{٧} = ٢٢٩٤ : ٠ \text{ و } \frac{٧}{١٥} = - ٢٢٩٤ : ٠$$

ورابعا اذا كان المطلوب تعيين لوغاريتم عدد اعشارى يقال حيث ان  
العدد الاعشارى يكافى كسر اعتيادى ببسطه العدد الصحيح الحادث من تجريد  
العدد المفروض من الشرطة ومقامه واحد متبوع باصفار عددها كعدد  
الارقام الاعشارية الموجودة على يمين الشرطة فبمقتضى ما تقرر في تعيين  
لوغاريتم كسر اعتيادى يلزم لتحصيل لوغاريتم عدد اعشارى ان يعين لوغاريتم  
العدد الصحيح الحادث من حذف الشرطة من العدد المفروض ويطرح منه  
آحاد بقدر الارقام الاعشارية الموجودة في العدد المفروض لان لوغاريتم  
الواحد المتبوع بجملة اصفار هو عدد الاصفار المذكورة كافي (بند ١١٣)



لكن اذا كان العدد الاعشارى المفروض اكبر من الواحد كان لوغاريتمه موجباً فاذا كان المطلوب مثلاً تعيين لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ لزم ان يبحث عن اللوغاريتم ٤٣ ٠٤٣٧٧٣٠٥ المتسوب للعدد ١٨٩٣٦٧ ويطرح منه الرقم ٤ فيكون الباقي ٤٣ ٠٤٣٧٧٣٠٥ هو اللوغاريتم المطلوب واذا كان العدد الاعشارى المفروض اصغر من الواحد كان لوغاريتمه سالبا فاذا كان المطلوب مثلاً تعيين لوغاريتم العدد ٠٠٠١٨٩٣٦٧ لزم ان يقطع النظر في مبدأ الامر عن الشرطة ويبحث عن لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ فيكون ٤٣ ٠٤٣٧٧٣٠٥ وحيث ان العدد المعلوم مركب من ثمانية ارقام اعشارية يلزم لتحصيل لوغاريتمه ان يطرح من اللوغاريتم ٤٣ ٠٤٣٧٧٣٠٥ الرقم ٨ وبناء على ذلك يكون العدد ٤٣ ٠٤٣٧٧٣٠٥ - ٨ هو اللوغاريتم المطلوب ويلزم لايجاد الباقي المذكور ان يطرح ٤٣ ٠٤٣٧٧٣٠٥ من ٨ ويقرن الباقي بعلامة - فيكون الناتج - ٢٧٢٢٦٩٥٧ هو لوغاريتم العدد ٠٠٠١٨٩٣٦٧

ويمكن ايضا كما في (بند ١١٢) تحويل اللوغاريتم - ٢٧٢٢٦٩٥٧ الى لوغاريتم عدده البيانى سالب فقط بملاحظة ان لوغا ٠٠٠١٨٩٣٦٧

$$= ٤٣ ٠٤٣٧٧٣٠٥ - ٥ = ٤٣ ٠٤٣٧٧٣٠٥ + ٥ - ٨ = ٨ - ٥ = ٣$$

$$+ ٤٣ ٠٤٣٧٧٣٠٥ = ٤٣ ٠٤٣٧٧٣٠٥ + ٣ - ٣ = ٣ - ٣ = ٠$$

والعلامة - الموضوعة فوق العدد ٣ تدل على انه سالب فقط

### \*(المسئلة الثانية العملية)\*

(١١٧) اذا علم لوغاريتم وكان المطلوب تعيين العدد الذى ينسب اليه يقال  
اولا اذا كان اللوغاريتم المعلوم موجبا كان العدد المتسوب اليه اكبر من الواحد وحينئذ يكون العدد البيانى بعد ان يضاف اليه واحد الا كما  
فى (بند ١١٢) على عدد ارقام الجزء الصحيح من العدد المتسوب الى اللوغاريتم المعلوم

اذا تقرر ذلك يقال اذا كان العدد البيانى للوغاريتم معلوم قدره ٣ كان

العدد المنسوب اليه هذا اللوغاريتم محصورا بين ١٠٠٠٠ و ١٠٠٠٠٠  
ولتحصيل هذا العدد يبحث عن اللوغاريتم المعلوم في الصفوف المعنونة بلفظة  
انساب فان وجد اللوغاريتم المذكور في الجدول كان العدد المنسوب اليه  
موضوعا على يمينه في الصف المعنون بلفظة اعداد

وبناء على ذلك يشاهدان اللوغاريتمات ٣٦٥٦٠٩٨٢ و ٣٢٧٧١٥٠٦  
و ٣٢٧٧٣٨٠٠ منسوبة للاعداد ٤٥٣٠ و ١٨٩٣  
و ١٨٩٤

واذا كان اللوغاريتم المعلوم الذي عدده البياني ٣ ليس موجودا في الجدول  
لزم حصره بين لوغاريتمين متوالين جدوليين منسوبين لعددان صحيحين  
متواليين فيكون اصغر هذين العددين هو الجزء الصحيح من العدد الاعشاري  
المنسوب اليه اللوغاريتم المعلوم

واما الجزء الاعشاري المنسوب للعدد المطلوب فيتعين بهذه الكيفية وهي ان  
يقال نسبة الفرق بين اللوغاريتمين الجدوليين الحاصرين بينهما اللوغاريتم  
المعلوم الى الفرق بين اللوغاريتم المعلوم واصغر اللوغاريتمين الجدوليين كنسبة  
واحد الى الجزء الاعشاري من المنسوب اليه اللوغاريتم المعلوم

ومقدار من المستخرج من هذه المتناسبة يكون في العادة ميناثة ثلاثة  
ارقام فاذا كان المعلوم اللوغاريتم ٣٢٧٧٣٠٤٣ مثلا

شاهد في الجدول ان هذا اللوغاريتم محصور بين اللوغاريتمين ٣٢٧٧١٥٠٦ و ٣٢٧٧٣٨٠٠  
المنسوبين للعدد ١٨٩٣ و ١٨٩٤  
وبناء على ذلك يكون الجزء الصحيح من العدد المطلوب هو ١٨٩٣ واما  
الجزء الاعشاري من هذا العدد فيلزم تعيينه ان يبحث في مبدأ الامر عن  
الفرق ٢٢٩٤٠٠٠٠ بين لوغاريتمين العدد ١٨٩٣ و ١٨٩٤  
ثم عن الفرق ١٥٣٧٠٠٠٠ بين اللوغاريتم المعلوم واصغر اللوغاريتمين  
الجدوليين ثم توضع المتناسبة



موجبا ومساويا للرقم ٣ ثم يبحث عن العدد المنسوب الى هذا اللوغاريتم الجديد وتقدم الشرطة منازل جهة يسار هذا العدد بقدر الآحاد التي اضيفت

الى العدد البياني فاذا اريد ايجاد العدد الذي لوغاريتمه ٣,٢٧٧٣٠٤٣ مثلا

نتج مما تقدم ان ٣,٢٧٧٣٠٤٣ = ٣ + ٣,٢٧٧٣٠٤٣

وبناء على ذلك اذا اضفنا الرقم ٦ للوغاريتم المعلوم صار الناتج

٣,٢٧٧٣٠٤٣ (لان ٣,٢٧٧٣٠٤٣ - ٣ بعد اضافة الرقم

٦ اليه يصير ٣,٢٧٧٣٠٤٣ + ٦ - ٣) ثم يبحث عن العدد

الذي ينسب اليه هذا الناتج فيشاهد انه ١٨٩٣٦٧ ثم تقدم الشرطة

ستة منازل جهة اليسار (لأننا اضفنا الرقم ٦ الى اللوغاريتم المفروض)

فيكون الناتج ١٨٩٣٦٧٠٠ هو العدد المطلوب

(١١٨) هذا ما يتعلق بالجزء الاول وهو المشتمل على لوغاريتمات الاعداد

من ١ الى ١٠٠٨٠ واما الجزآن الاخران فلم تصد لذكرهما هنا

لتوقفهما على امور خاصة بعلم حساب المثلثات فن اراد الوقوف على

حقيقتيهما فعليه بالاطلاع على العلم المذكور

\* (١٦٠) \*

\* (الباب الخامس) \*

في مسائل بحلها بقواعد هذا المختصر وتطبيقها عليها تتم التلامذة وتقوى ملكتهم في هذا العلم وهي مرتبة بحسب ترتيب قواعده

\* (مسائل تخص الدرجة الاولى) \*

\* (المسئلة الاولى) \*

كومتان من القل محتويتان على ٣٤٤ قلة تزيد احدهما عن الاخرى بمقدار ٦٤ قلة فما يكون عدد القل الموجودة في كليهما  
فالجواب عن ذلك ان يفرض  $m$  عدد القل الموجودة في صغرى الكومتين فيكون  $m + ٦٤$  عدد القل الموجودة في الكومة الكبرى فبناءً على ما تقدم يحصل

$$m + m + ٦٤ = ٣٤٤ \text{ اى}$$

$$٢m + ٦٤ = ٣٤٤ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$m = ١٤٠ \text{ قلة وهو العدد الاصغر}$$

وحيث كان العدد الاكبر مساوياً للكمية  $m + ٦٤$  يكون مساوياً للكمية  $١٤٠ + ٦٤$  المساوية للكمية  $٢٠٤$  بمعنى انه يوجد في احدى الكومتين ١٤٠ قلة وفي الاخرى ٢٠٤ وتحقيق ذلك ان مجموعهما يساوى ٣٤٤ وقاضيهما يساوى ٦٤

\* (المسئلة الثانية) \*

ثلاث قل عيار الاولى ١٢ بوصه والثانية ١٠ بوصات والثالثة ٨ وزنة الجميع ١٤٣ كيلوجراما لكن الاولى تزيد عن الثانية بمقدار ٢٢ كيلوجراما والثانية عن الثالثة بمقدار ٢٩ كيلوجراما فما تكون زنة كل قلة من القل الثلاث

فالجواب عن ذلك ان يقال اذا رمزنا بالحرف  $m$  زنة القلة التى عيارها ٨ بوصات فيكون  $m + ٢٩$  زنة القلة التى عيارها ١٠ بوصات و  $m + ٢٩ + ٢٢$  اى  $m + ٥١$  زنة

\*(١٦١)\*

القلة التي عيارها ١٢ بوصة وحيث كانت زنة الثلاث قتل تبلغ ١٤٣ كيلوجراما يحدث

$$س + س + ٢٩ + س = ١٤٣ \text{ او}$$

$$٣ س + ٨٠ = ١٤٣ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س = ٢١$$

بمعنى ان زنة القلة التي عيارها ٨ بوصات يكون ٢١ كيلوجراما فتكون حينئذ زنة القلة التي عيارها ١٠ بوصات ٢١ + ٢٩ اي ٥٠ كيلوجراما وزنة القلة الثالثة التي عيارها ١٢ بوصة ٥٠ + ٢٢ اي ٧٢ كيلوجراما وتحقيق ذلك ان زنة الثلاث قتل تساوي ١٤٣ كيلوجراما

\*(المسئلة الثالثة)\*

اذا كان المطلوب قسمة ٢١٣٧٥ خرطوشا على ثلاث فرق من العساكر قواها مناسبة للاعداد ٣ و ٥ و ١١ اي ان قوة الاولى على  $\frac{٣}{٥}$  قوة الثانية وعلى  $\frac{٣}{١١}$  من قوة الثالثة

فالاجواب عن ذلك ان يفرض ان ٣ س عدد خرطوشات اللازمة للفرقة الاولى و ٥ س عدد خرطوشات الثانية و ١١ س عدد خرطوشات الفرقة الثالثة (وانما اخترنا هذه الفروض للفرق الثلاثة لوجهين الاول ان ٣ س عبارة عن  $\frac{٣}{٥}$  العدد ٥ س وعن  $\frac{٣}{١١}$  من العدد ١١ س والثاني تناسب هذه الفروض مع الاعداد ٣ و ٥ و ١١) فحيث كان مجموع هذه الاجزاء الثلاثة يعادل ٢١٣٧٥ يحدث

$$٣ س + ٥ س + ١١ س = ٢١٣٧٥ \text{ اي}$$

$$١٩ س = ٢١٣٧٥ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س = \frac{٢١٣٧٥}{١٩} = ١١٢٥$$

وحينئذ يكون ما يخص الفرقة الاولى ١١٢٥ × ٣ اي ٣٣٧٥ خرطوشا وما يخص الثانية ١١٢٥ × ٥ اي ٥٦٢٥ وما يخص الثالثة

١١ X ١١٢٥ اى ١٢٣٧٥ وتحقيق ذلك ان المجموع يساوى  
٢١٣٧٥ وهالطريقة اخرى للحل هي

ان يرمز بالحرف سـ لعدد خراطيش الفرقة الاولى فيكون  $\frac{س}{١١}$  هو  
عدد خراطيش الفرقة الثانية و  $\frac{س}{١١}$  عدد خراطيش الفرقة الثالثة ومن  
ذلك تحدث هذه المعادلة  $س + \frac{س}{١١} + \frac{س}{١١} = ٢١٣٧٥$  وبحل  
هذه المعادلة واستخراج مقدار س منها يوجد  $س = ٣٣٧٥$  خرطوشا  
فحينئذ يكون عدد خراطيش الفرقة الثانية ٥٦٢٥ وعدد خراطيش  
الفرقة الثالثة ١٢٣٧٥

\*(المسئلة الرابعة)\*

اذا كان المطلوب معرفة اللحظات التى يتلاقى فيها عقربا الساعات والدقائق  
لساعة ما

فالجواب عن ذلك ان يقال من الواضح ان تلاقى العقربين قد يقع وقت  
الغروب فحينئذ لا حاجة لتأنيه والغرض انما هو البحث عن التلاقيات الاخر  
المتابعة الواقعة بعد التلاقى المذكور فنقول

يرمز بالحرف هـ للمحيط بتمامه وبالحرف سـ للمسافة التى قطعها عقرب  
الساعات من وقت الغروب الى وقت التلاقى الاول فيكون  $\frac{س}{١٢}$  هـ هي  
المسافة التى قطعها عقرب الدقائق فى الوقت المذكور وهذه المسافة  
عبارة عن المحيط زائد المسافة سـ اعنى ان  $١٢ س = هـ + س$   
ويستتج من هذه المعادلة  $س = \frac{هـ}{١١}$  وحيث ان عقرب الساعات  
يقطع المحيط بتمامه فى مدة ١٢ ساعة يقطع المسافة  $\frac{هـ}{١١}$  فى  $\frac{١٢}{١١}$  من  
ساعة

الساعة اى فى  $\frac{١}{١١}$  وبناء على ذلك فليحظ ان التقابلان المتابعة

ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة
من وقت الغروب	$\frac{١}{١١}$	$\frac{٢}{١١}$	$\frac{٣}{١١}$	$\frac{٤}{١١}$	$\frac{٥}{١١}$
ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة
$\frac{٦}{١١}$	$\frac{٧}{١١}$	$\frac{٨}{١١}$	$\frac{٩}{١١}$	$\frac{١٠}{١١}$	$\frac{١١}{١١}$

\* (١٦٣) \*

وهالك بعض مسائل بسيطة لتقرين المبتدى اقتصرنا على بيان نتائج حلها  
لتحقيق ما يجده الطالب

\* (المسئلة الاولى) \*

رجل عمره ثمانية امثال عمر والده ومجموع عريهما ٣٦ سنة فايكون عمر  
كل منهما

فالجواب ان عمر الوالد ٤ سنوات وعمر والده ٣٢ سنة

\* (المسئلة الثانية) \*

تلميذ ان ذهب الى المكتب اخذ مجازاة له ٨ ١ وان لم يذهب دفع عقابا له  
٣٠ فبعد مضي ثلاثين يوما وجد معه ٣٠ ٦ فايكون قدر ايام  
البطالة وقدر ايام الشغل

فالجواب ان قدر ايام الشغل ١٥ يوما كقدر ايام البطالة

\* (المسئلة الثالثة) \*

قلتان زنة احدهما ٣٦ رطلا وزنة الاخرى ٢٤ رطلا ومجموع قطريهما  
٣١٥ ميليميترا وفاضلهما ٢١ ميليميترا فامقدار كل من القطرين  
فالجواب ان قطر الاولى ١٦٨ ميليميترا وقطر الاخرى ١٤٧

\* (المسئلة الرابعة) \*

تاجر اشترى مقدار من الخطب وباعه فاكسب مبلغا قدره ٢٠٠٠ معتبرا  
انه ربح في كل مائة ١٠ من المبلغ المباع فايكون قدر رأس ماله الذي  
اشترى به الخطب المذكور

فالجواب ان رأس المال ١٨٠٠٠

\* (المسئلة الخامسة) \*

مخلوط قدره ١٧ رطلا مركب من ١٥ رطلا من ملح البارود و ٢ من  
الكبريت فماتكون الكمية التي يلزم اضافتها على هذا المخلوط من ملح البارود  
بحيث يكون موجودا في كل ١٧ رطلا من هذا المخلوط  $\frac{1}{4}$  رطل من  
الكبريت فقط



فالجواب عن ذلك انه يلزم اضافة ٥١ رطلا من ملح البارود  
ولتذكر مسائل مطبقة على حل معادلتين فاكتر مجهولين فاكتر

\*(المسئلة الاولى)\*

بجملتان من الدانات احدهما مركبة من ١٢ دانة عيار كل منها ٨ ومن  
١٨ دانة عيار كل منها ٦ وزنة المجموع ٤٦٩٩٢٥ كيلو جراما  
والاخرى مركبة من ٢٠ دانة عيار كل منها ٨ ومن ١٥ عيار كل منها  
٦ وزنة المجموع ٦٠٦٩٨٧ كيلو جراما فلتكون زنة كل دانة منها  
فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف صه لزنة الدانة التي عيارها ٨  
وبالحرف صه لزنة الدانة التي عيارها ٦ فتحدث هاتان المعادلتان

$$١٢ صه + ١٨ صه = ٤٦٩٩٢٥ و$$

$$٢٠ صه + ١٥ صه = ٦٠٦٩٨٧$$

ولا استخراج صه من هاتين المعادلتين تحذف صه منهما بان يستخرج

$$\text{من الاولى} \quad صه = \frac{٤٦٩٩٢٥ - ١٢ صه}{١٨}$$

$$\text{ومن الثانية} \quad صه = \frac{٦٠٦٩٨٧ - ٢٠ صه}{١٥}$$

ويتسوية هذين المقدارين ببعضهما تحدث هذه المعادلة

$$\frac{٤٦٩٩٢٥ - ١٢ صه}{١٨} = \frac{٦٠٦٩٨٧ - ٢٠ صه}{١٥} \text{ اى}$$

$$٨٧٥ و ٤٨٠ - ١٨٠ صه = ٧٦٦ و ٩٢٥ - ١٠ صه - ٣٦٠ صه ومنها$$

$$\text{يستخرج} \quad صه = \frac{٣٨٧٦ و ٨٩١}{١٨٠} = ٢١ و ٥٣٨ \text{ كيلوجراما}$$

فاذا وضعنا بدل الحرف صه مقداره المستخرج في المعادلة الاولى ذات  
المجهولين يحدث

$$صه = \frac{٢٥٨ و ٤٥٦ - ٤٦٩ و ٩٢٥}{١٨} = \frac{٢١ و ٥٣٨ \times ١٢ - ٤٦٩ و ٩٢٥}{١٨}$$

كيلوجراما

\*(المسئلة الثانية)\*

مدفع عياره ١٦ مركب من نحاس وقصدير زنته ٢٠١٠ و ٦٤٠  
كيلوجراما أو ٢٠١٠ و ٦٤٠ جراما وجمعه ٢٢٣ دسيمترامكعبا

تقرض إن زنة الديسيميتر المكعب من التحاس يساوى ٩٢٥٠ جراما  
وزنة الديسيميتر المكعب من القصدير يساوى ٧٣٢٠ جراما فتكون زنة  
كل من التحاس والقصدير

فالجواب عن ذلك أن يرمن بالحرف ص لعدد الديسيمترات المكعبة من التحاس  
وبالحرف ص لعدد الديسيمترات المكعبة من القصدير فيحدث بالنظر  
لديسيمترات المكعبة هذه المعادلة ص + ص = ٢٢٣ ويحدث

بالنظر للزنة ٩٢٥٠ ص + ٧٣٢٠ ص = ٢٠١٠٦٤٠

ثم يستخرج من المعادلة الأولى ص = ٢٢٣ - ص ومن الثانية

ص =  $\frac{٢٠١٠٦٤٠ - ٧٣٢٠ ص}{٩٢٥٠}$  ومن هاتين المعادلتين يستتبع

$\frac{٢٠١٠٦٤٠ - ٧٣٢٠ ص}{٩٢٥٠} = ٢٢٣ - ص$  أو

$$٢٧ = \frac{٥٢١١٠}{١٩٣٠} = ص$$

فعلى ذلك يوجد في المدفع المذكور ٢٧ ديسيمترا مكعبا من القصدير

و ٢٢٣ - ٢٧ أى ١٩٦ ديسيمترا مكعبا من التحاس

فإذا ضرب ٩٢٥٠ جراما في ١٩٦ وجد أن زنة التحاس ١٨١٣٠٠٠

جرام وإذا ضرب ٧٣٢٠ جراما في ٢٧ وجد أن زنة القصدير

١٩٧٦٨٠ جراما ونحقق ذلك أن زنة المجموع ٢٠١٠٦٤٠ جراما

(المسئلة الثالثة)\*

مائة اقة من بارود المدافع مكونة من ملح البارود والكبريت والفحم بشرط أن

ثلاثة امثال زنة ملح البارود تعادل زنة الفحم ١٣ مرة مضافا عليها خمسة

امثال زنة الكبريت وان خمسة امثال زنة الملح تعادل زنة الكبريت ٣٧ مرة

مطروحا منها سبعة امثال زنة الفحم فتكون زنة كل من المواد الثلاث

فالجواب عن ذلك أن يرمن بالحرف ص لزنة الملح الكائن في الخليط وبالحرف

ص لزنة الكبريت كذلك وبالحرف ع لزنة الفحم كذلك فيحدث أولا

$$١٠٠ = ع + ص + ص$$

ومن الشرط الاول  $٣ ص = ٥ ص + ١٣ ع$

ومن الشرط الثاني  $٥ ص = ٣٧ ص - ٧ ع$

وباستخراج  $ص$  من الاولى والثانية والثالثة يحدث

$$ص = ١٠٠ - ٣ ص - ع$$

$$ص = \frac{٥ ص + ١٣ ع}{٣}$$

$$ص = \frac{٣٧ ص - ٧ ع}{٥}$$

وبنسوية اول مقدار بشئ مقدار ثم بثالث مقدار للجهول  $ص$  يحدث

$$\frac{٥ ص + ١٣ ع}{٣} = ١٠٠ - ٣ ص - ع$$

$$\frac{٣٧ ص - ٧ ع}{٥} = ١٠٠ - ٣ ص - ع$$

وبحذف المقامات يحدث على التوالي

$$٥ ص + ١٣ ع = ٣٠٠ - ٣ ص - ع$$

$$٣٧ ص - ٧ ع = ٥٠٠ - ٣ ص - ع$$

وبتحويل الحدود المشتملة على المجهول  $ص$  الى طرف واحد يحدث

$$٨ ص = ٣٠٠ - ١٦ ع$$

$$٤٢ ص = ٥٠٠ + ٢ ع$$

$$ص = \frac{٣٠٠ - ١٦ ع}{٨}$$

$$ص = \frac{٥٠٠ + ٢ ع}{٤٢}$$

وبنسوية مقدارى  $ص$  ببعضهما تحدث معادلة تحتوى على المجهول  $ع$

فقط يستتج منها  $ع = \frac{١٠٧٥}{٨٦} = ١٢ \frac{١}{٦}$  وهو مقدار المجهول المذكور

وبوضع  $١٢ \frac{١}{٦}$  بدل المجهول  $ع$  فى اول مقدار للجهول  $ص$  يحدث

$$ص = \frac{٢٠٠ - ٣٠٠}{٨} = ١٢ \frac{١}{٦}$$

وبوضع  $١٢ \frac{١}{٦}$  بدل كل من المجهولين  $ص$  و  $ع$  فى اول مقدار للجهول

$ص$  يحدث

$$٧٥ = ٢٥ - ١٠٠ = ٧٥$$

فعلی هذا تكون المائة اقه من بارود المدافع مركبة من ٧٥ اقه من ملح  
البارود ومن  $\frac{1}{4}$  ١٢ من الكبريت و  $\frac{1}{4}$  ١٢ من الفحم وبناء على ذلك فلي  
البارود الداخل في تركيب بارود المدافع يكون  $\frac{3}{4}$  المخلوط واما كل من  
الكبريت والفحم فيكون  $\frac{1}{8}$  المخلوط

وهذه مسائل من هذا القبيل يراد حلها من الطلبة

\* (المسئلة الاولى) \*

٢١٩ فرنكا يطلب عملها ٦٠ قطعة من المصكوكات قيمة بعضها ٥  
فرنكات وقيمة البعض الآخر ٢ فرنكان فكم يلزم عمله من الصنف الاول  
وكم يلزم عمله من الصنف الثاني ..  
فالجواب انه يلزم عمل ٣٣ قطعة قيمة كل منها ٥ فرنكات و ٢٧  
قطعة قيمة كل منها ٢ فرنكان

\* (المسئلة الثانية) \*

عربه فيها ٥٠ قلة عيار بعضها ١٢ اصبعاً وعيار البعض الآخر ١٠ اصابع  
وزنة كل قلة من العيار الاول ٧٢ كيلوجراماً ووزنة كل قلة من العيار الثاني  
٥٠ كيلوجراماً ووزنة مجموع القل ٢٦٩٨ كيلوجراماً فما يكون عدد  
القل الموجود في كل من النوعين  
فالجواب عن ذلك ان عدد قل العيار الاول ٩ قلات وعدد قل العيار  
الثاني ٤١ قلة

\* (المسئلة الثالثة) \*

٦٠٠ تلميذ يشغلون اربعة ادوار من مدرسة بشرط ان تكون عدد  
تلاميذ الدور الاول ضعف عدد تلاميذ الدور الرابع وان مجموع تلاميذ الدور  
الثاني والثالث يعادل مجموع تلاميذ الدور الاول والرابع وان عدد تلاميذ  
الدور الثالث  $\frac{5}{7}$  تلاميذ الدور الثاني فكم يوجد من التلاميذ في كل دور من  
الادوار الاربعة المذكورة

فالجواب عن ذلك انه يوجد ٢٠٠ تلميذ في الدور الاول و ١٧٥ في الدور  
الثاني و ١٢٥ في الثالث و ١٠٠ في الرابع

\*(المسئلة الرابعة)\*

ثلاث صبر من خليط الغلال في شونة واحدة كل مائة اوقه من الصبرة الاولى  
تحتوى على ٨٠ اوقه من القمح و ١٢ اقة من الذرة و ٨ اقات من  
الشعير وكل مائة اقة من الصبرة الثانية تحتوى على ٧٥ اقة من القمح  
و ١٥ اقة من الذرة و ١٠ اقات من الشعير وكل مائة اقة من الصبرة  
الثالثة تحتوى على ٦٠ اقة من القمح و ٢٠ اقة من الذرة  
و ٢٠ اقة من الشعير فبالزمن اخذه من كل صبرة لتكوين صبرة رابعة  
كل مائة اقة منها تحتوى على ٧٣ اقة من القمح و ١٥ من الذرة  
و ١٢ من الشعير

فالجواب عن ذلك ان ما يلزم اخذه من الصبرة الاولى ٥٠ اقة ومن  
الثانية ٢٠ اقة ومن الثالثة ٣٠ اقة

\*(مسائل تحل بواسطة القواعد المقررة في الدرجة الثانية)\*

\*(المسئلة الاولى)\*

من المقرر في علم الطبيعة ان الاجسام الساقطة تقطع مسافات مناسبة  
لمربعات الازمنة الساقطة فيها فاذا قطع جسم ٩٠٤٥ رء امتار في مدة  
سقوطه في اول ثانية فبايكون مقدار الثواني اللازمة لسقوط الجسم المذكور  
من ارتفاع قدره ١٣٢٥٣٤٧ ميتر

فالجواب عن ذلك ان ير من بالحرف  $s$  لعدد الثواني اللازمة لسقوط الجسم  
من الارتفاع المعين فنحدث هذه المتناسبة

$$٩٠٤٥ : ١٣٢٥٣٤٧ :: ١ : s \text{ ومنها يستخرج}$$

$$s = \frac{١٣٢٥٣٤٧}{٩٠٤٥} = \frac{١٣٢٥٣٤٧}{٩٠٤٥} = ٢٧.٠٢ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$s = ٢٧.٠٢ \pm = ٥.٢ \pm$$

ومقدارا

ومقدارا منه معا يحققان المعادلة  $\frac{132,0347}{2,9045} =$  واما المقدار  
الموجب للمجهول منه وهو ٢ وهـ ثوان فهو حل المسئلة

\*(المسئلة الثانية)\*

يمكن اعتبار الحزم اللازمة لتماسك طابية كاسطوانات قائمة فاذا كان مقدار  
من المواد كاف لصناعة ٢٥ حزمة قطر قاعدة كل منها ٣٢٥ ميليمترا  
واريد عمل المقدار المذكور ٣٦ حزمة طولها كطول حزم النوع الاول  
فما يكون قطر كل حزمة من هذا النوع الاخير

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف سـ لقطر حزمة النوع الثانى وبالحرف  
م لحجم المقدار المذكور فيكون  $\frac{م}{٢٥}$  هو حجم اسطوانة النوع الاول و  $\frac{م}{٣٦}$   
حجم اسطوانة النوع الثانى ومن حيث ان نسبة حجومات الاسطوانات المتحدة  
الارتفاع الى بعضها كنسبة مربعات اقطار قواعدها كما هو مقرر فى الهندسة  
تحدث هذه التناسبة

$$\frac{م}{٢٥} : \frac{م}{٣٦} :: (٢٢٥) : سـ$$

$$٣٦ : ٢٥ :: ١٠٥٦٢٥ : سـ$$

فحينئذ

$$سـ = \frac{١٠٥٦٢٥ \times ٢٥}{٣٦} = \frac{٢٦٤٠٦٢٥}{٣٦} \text{ ومنها يستخرج}$$

$$سـ = \pm \sqrt{\frac{٢٦٤٠٦٢٥}{٣٦}} = \pm \sqrt{\frac{٢٦٤٠٦٢٥}{٣٦}}$$

$$\pm \frac{١٦٢٥}{٦} = \pm ٢٧٠,٨$$

وحينئذ يكون القطر المطلوب ٢٧١ ميليمترا تقريبا و ١٠ اصابع

\*(المسئلة الثالثة)\*

من المعلوم ان خزنة الهون اسطوانة قائمة وان سعة خزنة الهون الذى عباره  
١٢ اصبع ٣٢٥ ميليمترا مكعبا وان سعة خزنة الهون الذى

عبارة ٨ اصابع تعادل ٢١٧ ميليمترا م عبا فاذا كان قطر قاعدة الهون الاول ١٢٦ ميليمترا م اعني ٨ م ٤ ص فليكون قطر الهون الثاني بفرض ان عمق الخزنتين واحد وان خزنة الهون الاول تسع اواق ط

١٦٩٣ جراما من البارود اى  $\frac{1}{4}$  ٧ ٣ وان خزنة الهون الثاني تسع اوقية ط

٦٣٥ جراما من البارود اى  $\frac{1}{4}$  ٢٠٠

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف م للقطر المطلوب ويلاحظ ان نسبة حجوم الاسطوانات المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة مربعات اقطار قواعدها وان نسبة حجوم خزن الاهوان الى بعضها كنسبة زئات البارود المحتوية عليه هذه الخزن الى بعضها فتحدث هذه المتناسبة

$$١٦٩٣ : ٦٣٥ :: (١٢٦) : م اى$$

$$\sqrt{١٦٩٣} : \sqrt{٦٣٥} :: ١٢٦ : م ومنها يستخرج$$

$$م = \frac{\sqrt{٦٣٥} \times ١٢٦}{\sqrt{١٦٩٣}} = \frac{\sqrt{٦٣٥}}{\sqrt{١٦٩٣}} \times ١٢٦$$

$$٧٧ \text{ ميليمترا} = ٠,٦١٢ \times ١٢٦ = ٠,٣٧٥٠٧٤ \times ١٢٦$$

فحينئذ يكون القطر المطلوب ٧٧ ميليمترا اى ١٠ م ٢ ص تقريبا .

### \* (المسئلة الرابعة) \*

اذا كان ارتفاع الميل الداخلى لطاية استحكامات يعادل ٢٧٤ و ٢ اى

٧ اقدام وقاعدته تعادل ٧٥٨ و ٢ اى ٤ ص ٢ اى ثلث الارتفاع فما يكون طول هذا الميل

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف م لطول هذا الميل ويلاحظ ان

مربع طول الميل المذكور يعادل مجموع مربعي ارتفاعه وقاعدته كما هو مقرر  
في الهندسة فيجاء

$$س^2 = (٢٢٧٤)^2 + (٠٧٥٨)^2 \text{ اي}$$

$$س^2 = ٥٠٧٤٥٦٤٠ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س = \pm \sqrt{٥٠٧٤٥٦٤٠} = \pm ٢٢٣٩٧$$

فحينئذ يكون طول الميل المذكور ٢٢٣٩٧

• (المسئلة الخامسة) •

ما العدد الذي اذا اضيف الى مربعه ١٣٢ يكون الناتج مساويا لمقدار  
هذا العدد ٢٣ مرة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لهذا العدد فيحدث هذه المعادلة

$$س^2 + ١٣٢ = ٢٣ س \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س = \pm \frac{٢٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{(٢٣)^2}{٤} - ١٣٢} = \pm \frac{٢٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{٥٢٨ - ٥٢٩}{٤}} \text{ او}$$

$$س = \frac{١ \pm ٢٣}{٢} = \frac{١ \pm ٢٣}{٢}$$

واذا رمز بقدرى س بالحرفين س و س يكون

$$س = \frac{١ + ٢٣}{٢} = ١٢$$

$$س = \frac{١ - ٢٣}{٢} = ١١$$

فحينئذ كل من العددين ١٢ و ١١ يحقق منطوق المسئلة

• (المسئلة السادسة) •

الاي اشترى مقداراً من الخيل بمبلغ ٤٥٠٠٠ غرض واخر اشترى مقدارا

من الخيل يزيد عدده عن عدد خيل الاى الاول ١٥ حصانا

بمبلغ قدره ٦٤٠٠٠ غرض بفرض ان ثمن الحصان الواحد من خيل



الالاى الثانى ينقص عن ثمن الحصان الواحد من خيل الالاى الاول بمبلغ قدره ٢٠٠ غرش فكم يكون عدد خيول كل الاى وكم يكون ثمن كل حصان منها

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س عدد خيل الالاى الاول فيكون س + ١٥ عدد خيل الالاى الثانى و  $\frac{٤٥٠٠٠}{س}$  ثمن كل حصان من خيل الالاى الاول و  $\frac{٦٤٠٠٠}{س+١٥}$  ثمن كل حصان من خيل الالاى الثانى فتحدث هذه المعادلة

$$\frac{٤٥٠٠٠}{س} + ٢٠٠ = \frac{٦٤٠٠٠}{س+١٥}$$

فاذا حذفنا المقامات ثم اختصرنا المعادلة وقسمت على مكرر المجهول ذى الدرجة الثانية حدث

$$س^٢ + ١١٠س = ٣٣٧٥ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س = \frac{-١١٠ \pm \sqrt{١٢١٠٠ + ١٣٣٥٠}}{٢} \text{ او } ٣٣٧٥ + (٥٥)$$

$$س = \frac{-١١٠ \pm \sqrt{١٢١٠٠ + ١٣٣٥٠}}{٢} \text{ او } ٦٤٠٠$$

$$س = ٨٠ \pm ٥٥ \text{ اى } س = ٢٥ \text{ و } س = ١٣٥$$

اما مقدار س = ٢٥ فانه يكون عدد خيل الالاى الاول وبناء على ذلك يكون العدد ٢٥ + ١٥ اى ٤٠ عدد خيل الالاى الثانى واما

مقدار س = ١٣٥ فانه يحقق للمعادلة فقط

### \* (المسئلة السابعة) \*

ثلاث فرق من الفعلة اذا اشتغلت معاً فى شغلة معينة اتمتها فى ظرف ١٥ ساعة واما اذا اشتغلت كل واحدة منها على حدها فان الاولى تستغرق اربعة اخماس الزمن الذى تستغرقه الفرقة الثانية فى اتمام الشغلة المذكورة وان الثانية تستغرق قدر ما تستغرقه الفرقة الثالثة من

الزمن ناقصا ١٥ ساعة فكم يكون مقدار الزمن الذي تستغرقه كل فرقة من هذه الفرق الثلاثة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س للزمن الذي تستغرقه الفرقة الثانية في اتمام الشغلة المذكورة فيكون  $\frac{٤}{س}$  هو الزمن الذي تستغرقه الفرقة الاولى ويكون س + ١٥ هو الزمن الذي تستغرقه الفرقة الثالثة واذ اقدرنا ايضا مقدار الشغل بالعدد ١ يكون  $\frac{١}{س}$  هو مقدار شغل الفرقة الاولى في ساعة واحدة و  $\frac{١}{س+١٥}$  مقدار شغل الفرقة الثانية في ساعة واحدة و  $\frac{١}{س+١٥}$  مقدار شغل الفرقة الثالثة في ساعة واحدة فحدث هذه المعادلة

$$\frac{١}{س} + \frac{١}{س+١٥} + \frac{١}{س+١٥} = ١ \text{ اى}$$

$$\frac{٧٥}{س} + \frac{١٥}{س} + \frac{١٥}{س+١٥} = ١ \text{ وبحذف المقامات يحدث}$$

$$٧٥س + ١١٢٥ + ١٥س = ٦٠س + ٩٠٠ + ٦٠س$$

٣  
٤ س + ٦٠ س وبقسمة جميع الحدود على س وتحويل الحدود المتشابهة الى طرف واحد واختصارها وتغيير العلامات يحدث

$$٤ س - ١٣٥ = ٢٠٢٥ \text{ ومنها}$$

$$س = \frac{٢٢٥}{٨} \pm \frac{١٣٥}{٨}$$

فحينئذ يكون مقدار المجهول

$$س = ٤٥ \text{ و } س = ١١ \frac{١}{٤}$$

ومقدار س = ٤٥ هو عدد الساعات التي تستغرقها الفرقة الثانية في اتمام الشغلة المعينة فبناء على ذلك يكون ٣٦ عدد الساعات التي تستغرقها الفرقة الاولى لاتمام ما ذكر ويكون ٦٠ عدد الساعات التي تستغرقها الفرقة الثالثة

واما مقدار  $\text{سم} = \frac{1}{2} \text{سم}$  فغير موافق لمنطوق المسئلة فلا يكون  
حلالها وانما هو محقق لا معادلة فقط

\*(مسالتان يحلان بواسطة التناسب العددي)\*

\*(المسئلة الاولى)\*

من المقرر في علم الطبيعة ان المسافات التي يقطعها الجسم الساقط المجرد عن  
العوائق في ظرف اربع ثوان  $\text{سم}$  تكون متناسبة عدديا فاذا فرض ان قلة  
استغرقت  $\text{ع}$  ثوان مدة سقوطها فقطعت  $\text{ع} \cdot ٩٠٤ \text{م}$  في الثانية الاولى  
و  $٧١٣ \text{م}$  في الثانية الثانية و  $٥٢٢ \text{م}$  في الثانية الثالثة  
فما مقدار المسافة التي قطعها القلة المذكورة في الثانية الرابعة  
فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف  $\text{سم}$  للمسافة التي قطعها القلة في الثانية  
الرابعة فتحدث هذه التناسبة

$$\begin{aligned} & \text{ع} \cdot ٩٠٤ \cdot ٧١٣ : ٥٢٢ \text{ سم} \text{ ومنها يستخرج} \\ & \text{سم} = ٧١٣ + ٥٢٢ - ٩٠٤ = ٣٣١ \text{ م} \\ & \text{او سم} = ٣٣١ \text{ م} \end{aligned}$$

فيكون مقدار  $\text{سم} = ٣٣١ \text{ م}$  هو المسافة المطلوبة وبناء على ذلك  
تكون القلة قد قطعت  $٧٨٠ \text{ م}$  في مدة الاربع ثوانى

\*(المسئلة الثانية)\*

قطر قلة عيارها  $٢٤$  رطلا محصور بين  $١٧ \text{ م}$  و  $٩١ \text{ م}$  ميليمترا  
و  $٤٧ \text{ م}$  و  $١٤٧ \text{ م}$  ميليمترا فما يكون القطر المتوسط لهذه القلة  
فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف  $\text{سم}$  للقطر المطلوب فتحدث هذه  
المتناسبة

$$\begin{aligned} & ١٧ \text{ م} : \text{سم} = ٤٧ : ١٤٧ \text{ م} \text{ ومنها يحدث} \\ & \text{سم} = ٦٤ \text{ م} \text{ اي } \text{سم} = ٦٤ \text{ م} \text{ ميليمترا} \end{aligned}$$

\* (١٧٥) \*

وهو مقدار القطر المتوسط المطلوب

• (مسائل تحل بواسطة التناسب الهندسي) •

• (المسئلة الاولى) •

ماهية جيش محتوي على ١٢٥٠٠ عسكري بلغت ٢٥٠٢٥٠ غرشا  
فما مقدار ماهية جيش يحتوي على ١٨٧٥٠ عسكري بفرض ان ماهية  
كل نفر من انصار الجيشين واحدة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف سم لماهية الجيش الثاني فتكون  
ماهية النفر الواحد منه  $\frac{سم}{١٨٧٥٠}$  وحيث كانت ماهية النفر الواحد من  
الجيش الاول مبينة بالكسر  $\frac{٢٥٠٢٥٠}{١٢٥٠٠}$  حدثت هذه المتساوية

$$\frac{سم}{١٨٧٥٠} = \frac{٢٥٠٢٥٠}{١٢٥٠٠} \text{ ومن ذلك تحدث هذه المتناسبة}$$

$$سم : ١٨٧٥٠ :: ٢٥٠٢٥٠ : ١٢٥٠٠$$

$$\text{ومنها يستخرج سم} = \frac{١٨٧٥٠ \times ٢٥٠٢٥٠}{١٢٥٠٠} \text{ اى}$$

سم = ٣٧٥٣٧٥ غرشا وهو ماهية الجيش الثاني وكان يمكن استخراج  
مقدار المجهول سم من المعادلة

$$\frac{سم}{١٨٧٥٠} = \frac{٢٥٠٢٥٠}{١٢٥٠٠} \text{ بدون مدخلة للتناسب في ذلك}$$

• (المسئلة الثانية) •

جيش محاصر عنده من المؤنة ما يكفيه ٣٠ يوما بناء على ان للنفر الواحد  
من الجيش المذكور في اليوم الواحد ٣٧٥ درهما فاذا يكون المقدار  
اللازم اعطاه للنفر الواحد من الجيش بحيث تكفيه هذه المؤنة ٣٦ يوما  
فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف سم لمقدار الدراهم اللازم اعطاها  
للنفر الواحد في اليوم الواحد وبالحرف د لعدد التعمينات اللازم صرفها  
في كل يوم للجيش فيكون ٣٧٥ د هو المقدار المنصرف في كل  
يوم من المؤنة في المدة الاولى وبناء على ذلك يكون مقدار المؤنة جميعها

٣٧٥ × ٣٠ وكذا يكون ٥ سم درهما مقدار المنصرف في كل يوم  
من المؤنة في المدة الثانية ويكون بناء على ذلك ٥ سم × ٣٦ مقدار المؤنة  
جميعها وحينئذ تحدث هذه المتساوية

$$٣٧٥ \times ٣٠ = ٥ \times ٣٦ \text{ سم أي}$$

$$٣٧٥ \times ٣٠ = ٥ \times ٣٦$$

ومنها تنتج هذه المتناسبة

$$٣٦ : ٣٠ :: ٣٧٥ : \text{سم} \text{ ومنها يستخرج}$$

$$\text{سم} = \frac{٣٧٥ \times ٣٠}{٣٦} = ٣١٢٥ \text{ درهما وهو ما يلزم اعطائه للنفر الواحد}$$

من المؤنة في المدة الثانية

وكان يمكن استخراج مقدار المجهول سم من اول الامر من المعادلة

$$٣٦ \text{ سم} = ٣٠ \times ٣٧٥ \text{ بدون مدخلة للناسب في ذلك}$$

\*(المسئلة الثالثة)\*

اذا كان المطلوب قسمة عدد الى ثلاثة اجزاء مناسبة لثلاثة اعداد معلومة يقال  
اذا رمز بالحروف سم و صه و ع للاجزاء الثلاثة المطلوبة وبالحروف  
م و د و ل للاعداد الثلاثة المعلومة وبالحرف د للعدد المعلوم الذي  
يراد تقسيمه يحدث بين سم و صه هذا الارتباط  $\frac{\text{سم}}{\text{صه}} = \frac{\text{د}}{\text{م}}$  وبين  
سم و ع هذا الارتباط  $\frac{\text{سم}}{\text{ع}} = \frac{\text{د}}{\text{ل}}$  فمن الارتباط الاول يستخرج صه  
 $= \frac{\text{سم} \times \text{م}}{\text{د}}$  ومن الارتباط الثاني يستخرج ع  $= \frac{\text{سم} \times \text{ل}}{\text{د}}$  وحيث ان

$$\text{سم} + \text{صه} + \text{ع} = \text{د} \text{ يكون}$$

$$\text{سم} + \frac{\text{سم} \times \text{م}}{\text{د}} + \frac{\text{سم} \times \text{ل}}{\text{د}} = \text{د} \text{ أي}$$

$$\text{سم} = \frac{\text{د} \times (\text{د} + \text{م} + \text{ل})}{\text{د} + \text{م} + \text{ل}}$$

$$\text{صه} = \frac{\text{سم} \times \text{م}}{\text{د} + \text{م} + \text{ل}} \text{ وبناء على ذلك يكون}$$

$$\text{ع} = \frac{\text{سم} \times \text{ل}}{\text{د} + \text{م} + \text{ل}} \text{ و}$$

$$\text{ع} = \frac{\text{د} \times \text{ل}}{\text{د} + \text{م} + \text{ل}} \text{ وهي مقادير الاجزاء المطلوبة}$$

وقد يحدث من هذه المعادلات الثلاث متناسبات هي

\* (١٧٧) \*

$$\begin{aligned} \text{م} + \text{د} + \text{ل} & : \text{م} :: \text{ه} : \text{و} \\ \text{م} + \text{د} + \text{ل} & : \text{ه} :: \text{ح} : \text{و} \\ \text{م} + \text{د} + \text{ل} & : \text{ح} :: \text{ع} : \end{aligned}$$

فيشاهد منها أن نسبة مجموع الثلاثة أعداد المتناسبة المعلومة إلى العدد الذي يراد تقسيمه كنسبة أحد الأعداد المعلومة إلى الجزء المطابق له الذي يراد استخراج

ويشاهد من ذلك جميعه أنه يلزم كثير من التناسبات وبناء عليه كثير من الضرب والقسمة بقدر ما يوجد من الأجزاء المتناسبة التي يراد استخراجها لكن إذا فرض أن  $\frac{\text{م} + \text{د} + \text{ل}}{\text{ه}} = \text{ك}$  أمكن الاستغناء عن الاطالة المذكورة لانه بالفرض المذكور يكون

$\text{م} = \text{ك} \times \text{و}$   $\text{د} = \text{ك} \times \text{ه}$   $\text{ل} = \text{ك} \times \text{ع}$  اعني أنه بضرب خارج قسمة  $\text{ه}$  على  $\text{م} + \text{د} + \text{ل}$  في العدد الاول يتكون الجزء الاول الذي يراد استخراج

وبضربه في العدد الثالث يتكون الجزء الثالث وقس على ذلك ولنمثل لذلك بمثالين فنقول

\* (المثال الاول) \*

المطلوب قسمة مبلغ ٢٣٧٤٠٠٥ من الغروش على عشرة بلوكات بحيث تكون اجزاء القسمة مناسبة لمقادير انقار البلوكات بفرض ان عدد انقار البلك الاول ١٠٠ والثاني ٩٦ والثالث ١٠٤ والرابع ١٠٢ والخامس ٩٥ والسادس ٩٢ والسابع ٩٠ والثامن ٨٨ والتاسع ٨٤ والعاشر ٨٠ فحل ذلك يقال من حيث ان عدد انقار البلوكات جميعها يعادل ٩٣١ يسكون  $\frac{٢٣٧٤٠٠٥}{٩٣١} = \text{ك}$  غرشا وبمقتضى ما ذكر في المسألة المتقدمة يقال اذا ضرب العدد ٢٥٠٠ غرشا المساوي  $\text{ك}$  في عدد انقار كل فرقة بالتوالي نتج ما يخص كل بلوك من الغروش فينتد يخص البلوك الاول ٢٥٥٠ غرشا والثاني

\* (٤٥) \*

٢٤٢٢,٥٠ والخامس ٢٦٠١ والرابع ٢٦٥٢ والثالث ٢٦٥٢  
والسادس ٢٣٤٦ والسابع ٢٢٩٥ والثامن ٢٢٤٤ والتاسع  
٢١٤٢ والعاشر ٢٠٤٠ غرشا

ويمكن اجتناب كثرة الضرب واختصار الحسابات بكيفية ان يقال من حيث  
ان خارج قسمة ٢٣٧٤,٥٠ غرشا على العدد ٩٣١ الذي هو مجموع  
عدد انفار البلوكات يعين ما يخص النقر الواحد يكون بناء على ذلك  
جدول هكذا

نقر	غرش
١	٢٥,٥٠
٢	٥١,٠٠
٣	٧٦,٥٠
٤	١٠٢,٠٠
٥	١٢٧,٥٠
٦	١٥٣,٠٠
٧	١٧٨,٥٠
٨	٢٠٤,٠٠
٩	٢٢٩,٥٠

فلم يبق شي غير اجراء عملية الجمع فقط هكذا

البلوك الاول	البلوك الثاني
عدد الانفار ما يخص البلوك	عدد الانفار ما يخص الانفار المذكوره
من الغروش	من الغروش
١٠٠	٩٠
٢٥٥٠	٢٢٩٥
	٠١٥٣
	<hr/>
	٢٤٤٨
	<hr/>
	٩٦

وبيان ذلك ان يقال حيث ان عدد انفار البوك الاول يبلغ ١٠٠ نفر  
 فتحصيل ما يخصه من الغروش يؤخذ ما يقابل العدد ١ من الجدول  
 وتقدم الشرطة جهة اليمين خاتين فيتحصل ما يخصه وهو ٢٥٥٠ غرشا  
 وكذلك لتحصيل ما يخص البوك الثاني يحلل العدد ٩٦ الذي هو عدد  
 انفاره الى ٩٠ + ٦ فاما لتحصيل ما يخص ٩٠ اى ٩ عشرات  
 فيؤخذ من الجدول ما يقابل العدد ٩ وتقدم الشرطة فيه جهة اليمين خات  
 واحدة فيكون ما يخص العدد ٩٠ نفرا هو ٢٢٩٥ واما لتحصيل  
 ما يخص العدد ٦ فيؤخذ من الجدول المبلغ ١٥٣ غرشا المقابل للعدد  
 ٦ فيكون ٢٤٤٨ ما يخص ٩٦ نفرا

وعلى مثل ذلك يكون العمل فى التماينة بلوكات الاخر

### \*(المثال الثانى)\*

المطلوب تقسيم ٤٣٢٥٤٤ مترامكعبايراد حفرها لعمل خندق على ٨  
 الايات بحيث تكون اجزاء القسمة مناسبة لمقادير انفار الايات بفرض انه  
 يوجد فى الاى الاول ١٨٥٠ نفرا وفى الثانى ٢٠٠٣ وفى الثالث  
 ١٠٢٧ وفى الرابع ١٥٠٠ وفى الخامس ١٧١٤ وفى السادس  
 ٩٨٠ وفى السابع ١٩٢٥ وفى الثامن ٢٥١٨  
 فنحل ذلك يقال حيث ان مجموع انفار الايات جميعها يعادل ١٣٥١٧  
 نفرا يكون  $k = \frac{432544}{13517} = 32$  مترامكعبا وهو ما يخص  
 نفر الواحد وتناء على ذلك يركب هذا الجدول



\* (١٨٠) \*

تقري	يخصه	مترا مكعبا
١		٣٢
٢		٦٤
٣		٩٦
٤		١٢٨
٥		١٦٠
٦		١٩٢
٧		٢٢٤
٨		٢٥٦
٩		٢٨٨

ومنه يستنتج كما في المثال المتقدم ما يخص كل الاى

وهذا الجدول الذى يعين به ما يخص كل الاى

نمرة الاى عدد الانفار ما يخص كل الاى من الامتار المكعبة

١	١٨٥٠	٥٩٢٠٠
٢	٢٠٠٣	٦٤٠٩٦
٣	١٠٢٧	٣٢٨٦٤
٤	١٥٠٠	٤٨٠٠٠
٥	١٧١٤	٥٤٨٤٨
٦	٠٩٨٠	٣١٣٦٠
٧	١٩٢٥	٦١٦٠٠
٨	٢٥١٨	٨٠٥٧٦

وعمل ذلك يكون العمل فيما اذا اريد توزيع مبلغ من الغروش على عدة قري معلومة بحيث تكون اجزاء التوزيع مناسبة لمقادير اطيان هذه القري المذكورة او تقسيم مقدار من المكعبات يراد ردمها او حفرها لانشاء جسر او ترعة على عدة قري بحيث تكون اجزاء التقسيم مناسبة لمقادير انفار هذه

التري

القرى وقس على ذلك جميع الامثلة التي تكون من هذا القبيل

\*(المسئلة الرابعة)\*

المطلوب تقسيم انعام قدره ٩٥٩٥٠٩٥ غرشا على خادمين بحيث يكون  
جزأ القسمة مناسبين لماهيتهما واردة مكثهما في الخدمة بفرض أن ماهية  
الاول في السنة ٦٠٠٠ غرش ومدة مكثه في الخدمة ١٥ سنة وأن  
ماهية الثاني في السنة ٥٠٠٠ غرش ومدة مكثه في الخدمة ٢٠  
سنة

ولحل ذلك يقال حيث ان جزئي القسمة مناسبان لحاصل ضرب  
الماهييتين في المديتين اعني مناسبين  $٦٠٠٠ \times ١٥$  اي ٩٠٠٠٠  
و  $٥٠٠٠ \times ٢٠$  اي ١٠٠٠٠٠ فيكون ما يخص الخادم الاول  
بمقتضى ما تقدم ٤٥٤٥٠ غرشا وما يخص الثاني ٥٠٥٠٠  
غرشا

\*(المسئلة الخامسة)\*

٣٠٠ عامل مكثوا ٥٠ يوما في عمل قطعة استحکامات طولها  
٢٠٠ متر وعرضها ٦ امتار وعمقها متران ولم يكن شغلهم في اليوم  
الواحد الا ٨ ساعات فما يكون مقدار العملة اللازمة لعمل قطعة  
استحکامات اخرى طولها ١٨٠ ميتر وعرضها ٨ امتار وعمقها  
٢٥ مترين في ظرف ٤٠ يوما بشرط ان لا يشتغلوا في اليوم الواحد  
الا ١٠ ساعات

فالجواب عن ذلك ان يقال حيث ان هذه المسئلة مركبة يجب بسطها  
وتنظيمها في سلك القاعدة الثلاثية البسيطة بتحويل الاثنى عشر عددا المحتوى  
عليها منطوق المسئلة الى اربعة اعداد فقط وذلك ان يرمز بالحرف س  
للعدد المطلوب من العملة ثم يقال حيث أن ٣٠٠ عامل اشتغلت ٥٠  
يوما في كل يوم ٨ ساعات يكون  $٣٠٠ \times ٨ \times ٥٠$  أي ١٢٠٠٠٠

هو عدد العملة الذين يعملون قطعة الاستحكامات الاولى في ظرف ساعة واحدة وكذا يقال حيث ان  $س$  عبارة عن عدد العملة الذين يعملون قطعة الاستحكامات الاخرى في ظرف  $٤٠$  يوما في كل يوم  $١٠$  ساعات يكون  $س \times ٤٠ \times ١٠$  اي  $٤٠٠ س$  هو عدد العملة اللازمة لعمل الاستحكامات الاخرى في ساعة واحدة وكذا يقال حيث ان مكعب القطعة الاستحكامات الاولى يعادل  $٢ \times ٦ \times ٤٠٠$  اي  $٢٤٠٠$  متر مكعب وان مكعب القطعة الثانية يعادل  $٢ \times ٨ \times ١٨٠٠$  اي  $٣٦٠٠$  متر مكعب تؤل المسئلة الى ايسط منها وهي ان يقال حيث  $١٢٠٠٠٠$  عامل اشتغلوا  $٢٤٠٠$  متر مكعب في ظرف ساعة واحدة وان  $٤٠٠ س$  عامل اشتغلوا  $٣٦٠٠$  متر مكعب في ظرف ساعة واحدة تحدث هذه المتناسبة

$$٢٤٠٠ : ٣٦٠٠ :: ١٢٠٠٠٠ : ٤٠٠ س \quad \text{ومنها}$$

$$\text{يستخرج} \quad ٤٠٠ س = \frac{١٢٠٠٠٠ \times ٣٦٠٠}{٢٤٠٠} = ١٨٠٠٠٠$$

$$س = \frac{١٨٠٠٠٠}{٤٠٠} = ٤٥٠$$

فحينئذ يلزم  $٤٥٠$  فاعلا لعمل قطعة الاستحكامات الاخرى في المدة المعينة في رأس السؤال

\*(مسائل تحل بواسطة قواعد المتوالية العددية)\*

بملاحظة ما هو مقرر في علم الميكانيكا في قواعد تحرك سقوط الاجسام من ان المسافة التي يقطعها جسم ساقط في زمن قدره  $ن$  تعادل  $\frac{١}{٢} ن^٢$  يفرض ان  $ح$  مقدار جذب الارض للاجسام وهو بمقتضى ما دلت عليه التجارب يساوي  $٩٨٠٨$  امتار في الثانية الواحدة في باريس و  $٩٧٨٠$  امتار تقريبا في مصر تحل مسألتان الاولى والثانية من المسائل الآتية

\*(المسئلة الاولى)\*

ما الارتفاع الذي تصل اليه بنبهة تستغرق في صعودها زمنا كالزمن الذي

تستغرقه

\*(١٨٣)\*

تستغرقه في الهبوط بفرض انها تستغرق في الصعود والهبوط زمنا قدره  
عشر ثوان

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف  $s$  للارتفاع المطلوب فيكون  

$$s = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 10^2 = 490$$
 حيث كان  $t = 10$  يكون  

$$s = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 20^2 = 1960$$
 متر وهو الارتفاع المطلوب

\*(المسئلة الثانية)\*

جسم سقط من اعلى منارة ارتفاعها ٧٨ و ٤٦٤ مترا فما يكون مقدار الزمن  
الذي استغرقه الجسم المذكور في سقوطه

فالجواب عن ذلك ان يقال من المعادلة  $s = \frac{1}{2} g t^2$  اي  $78.464$   

$$78.464 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{78.464 \times 2}{9.8} = 16$$
 اي  $t = 4$   
 اعني ان الجسم المذكور يستغرق في سقوطه مقدارا من الزمن قدره ٤  
ثوان

\*(المسئلة الثالثة)\*

غيطاني كان يسقي مائة شجرة موضوعة على استقامة واحدة وبعد كل منها عن  
جماورتها ٥ امتار بشرط ان البئر الذي يؤخذ منه الماء على امتداد  
خط الشجر بعيدا عن الشجرة الاولى بمقدار عشرة امتار فما تكون  
المسافة التي يقطعها الغيطاني المذكور في الذهاب والاياب لسقي المائة شجرة  
المذكورة

فالجواب عن ذلك انه اذا توصل في منطوق المسئلة يشاهد ان الغيطاني المذكور  
يقطع ٢٠ مترا في سقي الشجرة الاولى و ٣٠ مترا في سقي الثانية و ٤٠  
مترا في سقي الثالثة و ٥٠ مترا في سقي الرابعة وهلم جرا فبناء عليه تكون  
المسافة التي يقطعها الغيطاني المذكور لسقي الشجر جميعه حاصل جمع حدود

متوالية عددية حدها الاول  $x = ٢٠$  واساسها  $s = ١٠$   
وعدد حدودها  $n = ١٠٠$  ويستخرج هذا الحاصل من القانون

$$ع = \frac{٢ + ٢٠٠(١ - ١٠)}{١ - ١٠} \text{ بوضع مقادير } x \text{ و } s \text{ بدلها}$$

فاذن يحدث

$$ع = \frac{٩٩ \times ١٠٠٠ + ١٠٠ \times ٢٠ \times ٢}{١ - ١٠} = \frac{٩٩٠٠٠ + ٤٠٠٠}{١ - ١٠} \text{ اى}$$

$$ع = ٥١٥٠٠ \text{ متر اى } ٥١٥٠ \text{ ميترامترات اى } ١٢ \text{ فرسخا}$$

تقريبا

\*(المسئلة الرابعة)\*

غيطانى قطع مسافة قدرها ١٣٧٥٠ مترافى ذهابه وايابه لسقى مقدار  
من الاشجار شجرة شجرة على استقامة واحدة وبعد كل منها عن  
مجاورتها ٥ امتار ولما وصل الى الشجرة الاخيرة لسقيها كان قد قطع  
مسافة قدرها ٥٢٠ ميترامبدءا البئر الذى كان يفترق منه الموضوع  
على استقامة الاشجار والمطلوب معرفة عدد الاشجار والبعد الذى بين البئر  
والشجرة الاولى

فالجواب ان يقال حيث أن المسافة التى قطعها الغيطانى لسقى الشجر جميعه  
فى الذهاب هى عين المسافة التى قطعها فى الاياب تكون المسافة التى قطعها  
فى الذهاب او الاياب مبينة بهذا المقدار  $\frac{١٣٧٥٠}{١} =$  المساوى ٦٨٧٥٠  
ميتر وكذلك تكون المسافة التى قطعها لسقى الشجرة الاخيرة فى الاياب  
او الذهاب مبينة بهذا المقدار  $\frac{٥٢٠}{١} =$  المساوى ٢٦٠ وبناء عليه يتكون  
من المسافات المقطوعة بالتوالى لسقى الشجر جميعه متوالية عددية اساسها  
 $s = ٥$  وحدها الاخيرة  $x = ٢٦٠$  ومجموع حدودها  $ع = ٦٨٧٥$   
ويستخرج عدد حدودها  $n$  من هذا القانون

$$n = \frac{٢ + ٢٦٠(١ - ٥)}{١ - ٥} \text{ بوضع مقادير } s \text{ و } x$$

وع





\* (١٨٧) \*

$$\text{او } \frac{٥ + ٥^2 + ٥^3}{٦} = ع$$

$$\frac{(١ + ٥^٢)(١ + ٥)٥}{٢ \times ٢ \times ١} = ع$$

فهذا هو القانون المطلوب

في تطبيق هذا القانون على معرفة عدد القلل الموجودة في احدى الكومات الثلاث المعتاد تشكيلها في جبينات الطوبجية اذ من المعلوم انهم يضعون القلل والقبر والبنب على ثلاث صور متنوعة وهي الكومة الهرمية ذات القاعدة المربعة والكومة الهرمية ذات القاعدة المثلثية والكومة الممتدة المستطيلة القاعدة

\* (في حساب الكومة الهرمية ذات القاعدة المربعة) \*

هذه الكومة تتركب من طبقات مربعة متزايدة التربع بالابتداء من رأس الشكل الى قاعدته فاذا سلكتنا هذا الترتيب يكون في الطبقة الاولى قلة واحدة وفي الطبقة الثانية اربع قلل وفي الثالثة تسع قلل وفي الرابعة ست عشرة قلة وفي الخامسة خمسة وعشرون وهكذا الى الطبقة التي نمرتها ٥ فانها تحتوى على ٥ قلة والطبقة الاخيرة يقال لها قاعدة الكومة ومجموع قلل الكومة يكون حينئذ عبارة عن مجموع مربعات الاعداد الطبيعية بالابتداء من مربع العدد ١ الى مربع ٥ (و ٥ يدل على عدد القلل التي تحتوى عليها كل ضلع من القاعدة او كل حرف من احرف الكومة) فاذا رمز بالحرف ع لعدد القلل المحتوية عليها الكومة يكون بمقتضى

ما تقدم

$$\frac{(١ + ٥^٢)(١ + ٥)٥}{٢ \times ٢ \times ١} = ع$$

وهالجد ولا يمكن الاستغناء به عن القانون اذا كان عدد الطبقات ١ ٢ فاقبل وهو محقق للقانون ايضا



• (١٨٨) •

حرف	طبقة	كومة
١	١	١
٢	٤	٥
٣	٩	١٤
٤	١٦	٣٠
٥	٢٥	٥٥
٦	٣٦	٩١
٧	٤٩	١٤٠
٨	٦٤	٢٠٤
٩	٨١	٢٨٥
١٠	١٠٠	٣٨٥
١١	١٢١	٥٠٦
١٢	١٤٤	٦٥٠

فالصف الاول يدل على عدد الطبقات او على عدد القلل الموجود في كل حرف من الكومة والصف الثاني يدل على عدد القلل الموجودة في كل طبقة والصف الثالث يدل على عدد القلل الموجودة في الكومة بتمامها

فاذا كان  $٥ = ١٠$  مثلاً اعني انه يوجد عشر طبقات يؤل القانون

$$\text{الى ع} = \frac{٢١ \times ١١ \times ١٠}{٢} = ٣٨٥ \text{ كما هو مبين بالجدول}$$

\* (في حساب الكومة الهرمية ذات القاعدة المثلثية) \*

هذه الكومة تتركب من طبقات مثلثية متزايدة السطح بالابتداء من الرأس الى القاعدة وكل طبقة عبارة عن مثلث متساوي الاضلاع ماعدا الطبقة الاولى فانها لا تحتوى الا على قلة واحدة وضلع الطبقة الثانية يحتوى على قلتين وضلع الثالثة على ثلاث قلل وضلع الرابعة على اربع وهكذا الى الطبقة التي نمرتها  $٥$  فان ضلعها يحتوى على  $٥$  قلة وعدد القلل التي تحتوى عليها الى

طبقة كانت عبارة عن مجموع حدود متوالية عددية حدها الأول ١ واساسها واحد كذلك وعدد حدودها يساوى عدد القلل التى يحتوى عليها كل ضلع من الطبقة المذكورة فحينئذ اذا كان ضلع الطبقة يحتوى على ٥ قلة فالطبقة تحتوى على  $\frac{٥+٥}{٢}$  قلة اى  $\frac{١}{٢}(٥+٥)$  فاذا كانت ٥

تساوى على التعاقب ١ و ٢ و ٣ و ٤ الخ فالطبقات تحتوى على  $\frac{١}{٢}(١+١)$  و  $\frac{١}{٢}(٢+٢)$  و  $\frac{١}{٢}(٣+٣)$  و  $\frac{١}{٢}(٤+٤)$  و .....  $\frac{١}{٢}(٥+٥)$  قلة فاذا كان ع رمز العدد القلل الموجودة فى الكومة كما تقدم يحصل

$$\begin{aligned} \frac{١}{٢}(١+١) + \frac{١}{٢}(٢+٢) + \frac{١}{٢}(٣+٣) + \frac{١}{٢}(٤+٤) + \frac{١}{٢}(٥+٥) &= ع \\ \frac{١}{٢}(١+٢+٣+٤+٥) + \frac{١}{٢}(١+٢+٣+٤+٥) &= \\ \frac{(١+٥)(١+٥)٥}{٢ \times ٢ \times ١} &= \frac{٥+٥}{٤} + \frac{(١+٥)(١+٥)٥}{١٢} \end{aligned}$$

ولتكوين جدول لهذه الكومة كما فعل ذلك بالكومة المتقدمة يقال حيث كانت الطبقة التى ضلعها يحتوى على ٥ قلة تتركب من صفوف مكونة متوالية عددية كالتوالي المتكونة من اعداد السرد الطبيعى ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ..... ويكون عدد القلل الموجود فى هذه الطبقة مساويا ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ..... + ٥ وبناء على ذلك يتركب هذا الجدول

عدد قلل الطبقات

١ = ١	فى الطبقة الاولى
٣ = ٢ + ١	فى الثانية
٦ = ٣ + ٢ + ١	فى الثالثة
١٠ = ٤ + ٣ + ٢ + ١	فى الرابعة
٥ + ١٠ + ٤ + ٣ + ٢ + ١	فى الخامسة

وبالتالي في هذا الجدول يشاهد ان كل طبقة من طبقات هذه الكومة مكونة من اضافة الاعداد الطبيعية لبعضها على التعاقب الى العدد الدال على نمرة الطبقة وبمقتضى ذلك يحدث هذا الجدول

حرف	طبقة	كومة
١	١	١
٢	٣	٤
٣	٦	١٠
٤	١٠	٢٠
٥	١٥	٣٥
٦	٢١	٥٦
٧	٢٨	٨٤
٨	٣٦	١٢٠
٩	٤٥	١٦٥
١٠	٥٥	٢٢٠
.	.	.
.	.	.
.	.	.
خ	خ	خ

فالصف الاول يدل على عدد القل التي يحتوى عليها كل حرف من احرف الكومة او على عدد طبقات الكومة والثاني يدل على عدد القل الموجودة في كل طبقة واعداد هذا الصف مكونة من اضافة الاعداد الطبيعية لبعضها على التعاقب من ١ الى العدد الدال على نمرة الطبقة والصف الثالث يدل على عدد القل الموجودة في الكومة بتمامها واعداد هذا الصف مكونة من اضافة جميع اعداد الصف الثاني لبعضها على التعاقب الى العدد

الذى

\* (١٩١) \*

الذى غرضه تعداد طبقات الكومة وحينئذ فكل من هذه الحواصل يبين  
بالضرورة مجموع قلال الكومة بنهايتها لانه عبارة عن مجموع طبقات هذه الكومة  
فاذن يوجد ٢٢٠ قلة في الكومة التي عدد طبقاتها ١٠ وتحقق ذلك  
انه اذا وضع ١٠ بدل ٥ في القانون

$$ع = \frac{٥(١+٥)(٢+٥)}{١} \text{ الى}$$

$$ع = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠}{١} = ٢٢٠$$

وهذا ناتج عين الناتج المبين بالجدول

\* (في حساب الكومة الممتدة المستطيلة القاعدة) \*

هذه الكومة تتركب من طبقات مستطيلة متزايدة السعة بالابتداء من  
القمة الى القاعدة وان الطبقة الاولى منها تحتوى على صف واحد من القل  
فقط فاذا رمز بالحرف م لعدد القل الكائنة فيه يكون في الطبقة الثانية  
صفان من القل في كل صف منهما م + ١ قلة وفي الطبقة الثالثة  
٣ صفوف في كل صف م + ٢ قلة وفي الطبقة الرابعة ٤ صفوف  
في كل صف منها م + ٣ قلة وفي الطبقة النونية ٥ صف في كل صف منها  
م + ٤ - ١ قلة وبالبناء على ذلك فعدد القل التي في الطبقة  
النونية يكون ٥ (م + ٤ - ١) = ٥ م + ٤ - ١  
فاذا وضع بدل ٥ اعداد ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٥  
بالتوالي في هذا القانون يحدث

١ - ١ + م	في الطبقة الاولى
٢ - ٢ + م	وفي الثانية
٣ - ٣ + م	وفي الثالثة
٤ - ٤ + م	وفي الرابعة
⋮	⋮
٥ - ٥ + م	وفي الطبقة النونية

والمرحوم بالحري ع لحاصل جمع الطبقات ~~يكون~~

$$ع = م(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2 + 1) + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2 + 1) + \dots$$

$$- (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2 + 1) \text{ او}$$

$$ع = م \times \frac{(1+2)2}{2} + \frac{(1+2)2}{2} + \frac{(1+2)2}{2} + \dots + \frac{(1+2)2}{2}$$

$$= \frac{(1+2)2}{2} \times (م + 1 - \frac{(1+2)2}{2})$$

$$= \frac{(2-2^2+م^2)(1+2)2}{2}$$

ولا يمكن وضع جدول لهذه الكومة الا باعطاء م مقدارا اختياريا فاذا

فرض ان م = ١٠ مثلا يحصل هذا الجدول

عدد الطبقات	مقدار الطبقات	الكومة
١	١٠	١٠
٢	٢٢	٣٢
٣	٢٦	٦٨
٤	٥٢	١٢٠
٥	٧٠	١٩٠
٦	٩٠	٢٨٠
٧	١١٢	٣٩٢
٨	١٣٦	٥٢٨
٩	١٦٢	٦٩٠
١٠	١٩٠	٨٨٠
...	...	...
مجموع	مجموع	مجموع

فالصف الاول يدل على عدد طبقات الكومة وعلى عدد كل ضلع جانبي وهذا الصف ايضا يدل على رتب الطبقات في الكومة المعلومة والصف الثاني يدل على عدد القل التي توجد في الطبقات المختلفة المكونة للكومة والصف المذكور

يتكون

يتكون من القانون  $(م + هـ - ا)$  المتقدم بفرض  $م = ١٠$  واعطاء  
 $هـ$  جميع الاعداد الطبيعية ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ..... و بالتوالى  
والصف الثالث اى عدد منه بحسب باضافة اعداد الصف الثانى من ابتداء  
العدد الاول للصف المذكور الى العدد المحاذى له فى الوضع وهو مركب ايضا  
من حاصل جمع الطبقات وهو يحتوى على عدد قلة الكوم المتناظرة وحيث  
فالحد العاشر ٨٨٠ يدل على انه يوجد ٨٨٠ قلة فى الكومة المستطيلة  
المركبة من ١٠ طبقات والقانون  $ع = \frac{(١+٥)(٢-٥٢+٢٣)}{٦}$   
اذا وضع فيه ١٠ بدل م و ١٠ بدل هـ الى

$ع = \frac{٤٨ \times ١١ \times ١٠}{٦} = ٨٨٠$  وهوناتج موافق للناتج الموجود بالجدول  
هذا كله اذا كانت الكومة تامة فاذا لم تكن الكومة تامة اعتبر تمامها ثم  
تحسب الكومة التامة والكومة التى لزم اضافتها التميم الكومة الناقصة  
والفرق بين هاتين الكومتين يعين الكومة الناقصة ونمثل لذلك فنقول

اذا فرض ان الكومة الهرمية الناقصة ذات القاعدة المربعة مركبة من ٤  
طبقات وكل ضلع من قاعدتها محتوى على ٨ قلات كانت الكاملة مركبة  
من ٨ طبقات ومحتوية على  $\frac{١٧ \times ٩ \times ٨}{٦} = ٢٠٤$  قلة فاذا حذف  
منها  $\frac{٩ \times ٥ \times ٤}{٦} = ٣٠$  قلة وهو المقدار الذى يوجد فى الاربع طبقات المتمة  
فالباقى الذى هو ١٧٤ يدل على عدد القل الكاش فى الكومة الناقصة

واذا فرض ايضا ان الكومة الهرمية الناقصة ذات القاعدة المثلثية مركبة  
من خمس طبقات وكل ضلع من قاعدتها يحتوى على ٨ قلات كانت الكومة  
التامة مركبة من ٨ طبقات ومحتوية على  $\frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{٦} = ١٢٠$  قلة  
فاذا حذف منها  $\frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٦} = ١٠$  قلات وهو المقدار الذى يوجد فى  
الثلاث طبقات المتمة فالباقى ١١٠ قلة يكون عدد القل الموجود  
فى الكومة الناقصة

واذا فرض ان الكومة المستطيلة الناقصة مركبة من ٦ طبقات وكل  
ضلع من اضلاع قاعدتها يحتوى على ١٥ قلة وان صف القاعدة

~~المحتوى على ١٠ قلات كانت الكومة القائمة من ١٠ قلات~~

المحتوى على ١٠ قلات كانت الكومة القائمة من ١٠ قلات  
طبقات ومحتوية على  $\frac{36 \times 11 \times 10}{1} = 396$  قلة فإذا حذف منها  
 $\frac{24 \times 8 \times 4}{1} = 768$  قلة وهو المقدار الذي يوجد في الأربع طبقات المتمة  
يكون الباقي ٥٨٠ هو الكومة الناقصة

ويتعين المضروب ٣٦ في هذا المثال بواسطة المضروب ٣ م + ٢ = ٢  
الداخل في القانون المتقدم وحيث كان ١٥ = م + ٢ = ١  
يكون م = ١٥ - ١ = ١٠ + ١ = ٦ وكذلك يكون المضروب  
٢٤ في الكومة المتمة = ٢ × ٦ + ٤ × ٢ = ٢

وإذا كان المطلوب معرفة عدد طبقات كومة هرمية ذات قاعدة مربعة بعدد  
معرفة عدد القل المحتوية عليه الكومة أمكن بواسطة الجدول الممتد استدادا  
كانا لهذا الغرض الاستغناء عن إجراء عملية الحساب بأن يبحث في الخط  
الثالث عند عدد قل الكومة فالعدد الموجود في الخط الأول المقابل لهذا  
العدد يعين مقدار الطبقات الموجودة في الكومة فعلى ذلك إذا كانت الكومة  
تحتوي على ٦٥٠ قلة تكون مركبة من ١٢ طبقة

ويمكن أيضا حل هذه المسألة بواسطة القانون  $\frac{2^3 + 2^2 + 2^1}{1} = 7$   
الذي فيه كمية ع معلومة بأن يستخرج منه كمية ٥ لكن حيث أن هذه  
المعادلة بدرجة ثالثة فيتعسر حلها بالطرق المعتادة يكتب بالبحث عن الجذر  
التكعيبي لأعظم مكعب يوجد في ٣ ع وهذا الجذر التكعيبي يكون  
مقدارا للكمية ٥ أن وافق مقدار ع كومة كاملة وبرهانه أن يستخرج  
من المعادلة المتقدمة هذه المعادلة

$$2^3 + \frac{2^2}{1} + \frac{2^1}{1} = 7$$

ومنه ينتج  $2^3 < 7$  و  $7 < (1 + 2)^3$

$$\sqrt[3]{7} < 1 + 2 \text{ و } \sqrt[3]{7} > 2 \text{ أو}$$

فعلى

